



Titre: Analyse et caractérisation d'interactions fluide-structure
Title: instationnaires en grands déplacements

Auteur: Jean-François Cori
Author:

Date: 2011

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Cori, J.-F. (2011). Analyse et caractérisation d'interactions fluide-structure
Citation: instationnaires en grands déplacements [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/492/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/492/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Dominique Pelletier, & Stéphane Étienne
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE ET CARACTÉRISATION D'INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE
INSTATIONNAIRES EN GRANDS DÉPLACEMENTS.

JEAN-FRANÇOIS CORI
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)
JANVIER 2011

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

ANALYSE ET CARACTÉRISATION D'INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE
INSTATIONNAIRES EN GRANDS DÉPLACEMENTS.

présentée par : CORI JEAN-FRANÇOIS

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury constitué de :

M. GARON, André, Ph.D., président

M. PELLETIER, Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ÉTIENNE, Stéphane, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. PERRIER, Michel, Ph.D., membre

M. HÉTU, Jean-François, Ph.D., membre externe

*À Gérard, mon parrain,
Maryline, ma marraine
et Annette, ma filleule.*

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à mes directeurs de recherche, messieurs Dominique Pelletier et Stéphane Étienne, pour la qualité de leur encadrement, leur disponibilité et la confiance qu'ils m'ont témoignée. Leurs conseils, leurs qualités scientifiques et humaines m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions pour réaliser ce travail de thèse.

Je tiens également à remercier André Garon, Michel Perrier et Jean-François Hétu qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse. Leur disponibilité pour assister à ma soutenance et leur efficacité pour relire mon mémoire de thèse m'ont permis de mener à terme ce long projet tout en commençant ma vie professionnelle sur un autre continent.

Je remercie en outre le Fonds Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT) pour son support financier dans le cadre du programme de bourses de doctorat en recherche.

Je me dois d'adresser mes sincères remerciements à Bruno De Tuncq pour m'avoir donné la chance de mettre en pratique ma pédagogie et mes connaissances lors de la charge du cours de SPVC. Sa grande confiance m'a permis d'avoir ma première expérience dans l'enseignement de manière autonome, incluant la préparation d'un cours de A à Z.

Je voulais aussi souligner l'apport de toutes les personnes que j'ai pu rencontrer depuis mon arrivée à l'Ecole Polytechnique il y a plus de 6 ans comme étudiant en échange. En particulier, mon implication au sein de l'AÉCSP et du département de génie mécanique (un grand merci à Vivianne, secrétaire dévouée) m'ont permis d'agrandir le nombre de mes connaissances, aux deux sens du terme! Mais surtout, je n'oublierai jamais mon passage dans le labo C-306 dont la gaieté des habitants a largement compensé le manque de fenêtres. Stéphane, pilier de cet édifice, j'espère que tu sauras transposer cette bonne ambiance dans tes nouvelles activités. Lise, merci pour ta bonne humeur qui m'a accompagnée durant le long chemin de la thèse, je te souhaite de rejoindre l'arrivée de cette étape de ta vie le plus rapidement possible. Jérôme, partenaire infatigable, même pour les repas en tête à tête chez Aramarck, je te souhaite bon vent en Afrique du Sud et j'espère que tu auras tes papiers pour qu'on puisse se revoir quelque part sur le globe. Raymond, Harrold, Simon, Sina et Fernando, merci pour votre agréable compagnie tant au labo que dans les 5@7 sur

Cote-des-neiges! Enfin, une pensée pour tous les autres anciens qui ont eu la chance de passer par le labo : Farshad, Eric, Jean-Serge, Simon, Aurélien, Mounir, Dima, Nicolas, Romain,

Enfin, sur une note plus personnelle, un gros merci à Joanie pour son soutien indispensable, surtout dans la longue dernière ligne droite en pente raide! Merci aussi à toute ma famille ainsi qu'à mes amis qui m'ont permis de défendre mon projet de thèse après de longues années d'étude.

RÉSUMÉ

Le battement des ailes d'un oiseau ou le mouvement de nageoires d'un poisson produisent l'un des plus complexe et efficace moyen de propulsion qu'on puisse trouver dans la nature. Comprendre les processus physiques impliqués est un grand et beau défi, dont la portée est considérable, notamment dans le domaine grandissant des micro-drones (MAV). La poussée et la portance sont induites par un profil d'aile oscillant grâce à des phénomènes complexes d'interaction fluide-structure (IFS) instationnaires. De plus, le comportement aéroélastique d'un profil flexible peut-être grandement modifié par les grands déplacements de la structure causés par un couplage fort avec le fluide environnant. Le domaine des interactions fluide-structure possède en fait un champ d'applications beaucoup plus large : du monde des transports à celui du génie nucléaire, de l'aéronautique au génie civil, de la biomécanique à la microélectronique et de la propulsion à l'extraction de puissance. Reproduire et comprendre ces interactions entre deux comportements fortement non-linéaires requièrent l'assistance de la puissance de calcul informatique via la CFD (*Computational Fluid Dynamics*).

Même si une littérature grandissante est désormais disponible, beaucoup de travail reste encore à accomplir pour simuler correctement et précisément les interactions fluide-structure instationnaires fortement couplées. A l'échelle des bas nombres de Reynolds, les résultats classiques des études aéronautiques portant sur des ailes fixes ne sont plus applicables. De plus, les structures très flexibles (comme les membranes animales) introduisent de grands déplacements avec des non-linéarités géométriques. Enfin, pour étudier correctement les caractéristiques propulsives d'un profil oscillant, il est nécessaire de prendre en compte son déplacement induit par la poussée dans les simulations numériques.

Le but du travail présenté est de développer un cadre numérique basé sur la CFD pour simuler les phénomènes d'interaction fluide-structure impliqués dans la propulsion ou l'extraction de puissance d'un profil flexible oscillant dans un écoulement visqueux incompressible.

La méthode numérique proposée repose sur une formulation monolithique directe couplée à des intégrateurs en temps d'ordres élevés. Pour décrire les équations, on utilise une formulation d'Euler-Lagrange arbitraire (ALE) conçue pour satisfaire la loi de conservation géométrique (GCL) et ainsi garantir les ordres élevés de précision en temps des intégrateurs, même sur des domaines fluides se déformant. Les équations visqueuses incompressibles de

Navier-Stokes pour le fluide, hyperélastiques de Saint-Venant Kirchhoff pour la structure, de Newton pour la masse ponctuelle et d'équilibre pour les termes de couplage forment un large système monolithique à résoudre. L'approche IFS implicite monolithique utilise des nœuds coïncidents sur les interfaces fluide-structure afin que les efforts, les déplacements et les vitesses soient évaluées au même endroit en un temps identique. Le problème global est résolu de manière implicite grâce à une approche éléments finis de Newton-Raphson utilisant un pseudo-solide. Des intégrateurs en temps implicites de Runge-Kutta (IRK) d'ordres élevés (jusqu'au 5^e ordre) ont été implémentés pour améliorer la précision et réduire le coût du calcul numérique. Dans le contexte de problèmes raides d'IFS, la présente approche implicite à pas de temps unique est une alternative originale aux formulations traditionnelles à pas multiples ou explicites qui souffrent parfois d'un manque de stabilité.

La vérification du code numérique s'est faite grâce à trois études de convergence selon le pas de temps pour un profil rigide oscillant avec un domaine fluide en déformation, pour un problème de vibrations induites par l'écoulement d'une lamelle flexible et pour un profil oscillant autopropulsé. Ces trois études ont montré la stabilité de l'approche proposée même avec de grands pas de temps, l'absence d'oscillations parasites sans ajout de raideur numérique et la conservation de la précision théorique des schémas IRK.

On a appliqué cette approche numérique performante à trois applications intéressantes suite à une analyse dimensionnelle détaillée permettant d'obtenir leurs paramètres caractéristiques. Premièrement, on a étudié les caractéristiques vibratoires d'un problème d'interaction fluide-structure très documenté : une lamelle flexible fixée derrière un cylindre carré rigide. Les résultats obtenus se comparent favorablement avec les précédentes études. De plus, la précision des schémas d'intégration IRK (même pour le champ de pression des écoulements incompressibles), leur stabilité inconditionnelle et leur nature non-dissipative ont révélé de nouveaux modes structurels dans les hautes fréquences, faiblement couplés avec l'écoulement. Dans une seconde application, les caractéristiques d'extraction de puissance et de propulsion de profils oscillants rigide et flexible ont été explorées. L'étude des performances d'extraction de puissance d'une aile rigide (NACA0015) oscillante a donné des résultats en très bon accord avec ceux trouvés dans la littérature. Une seconde étude paramétrique a permis d'identifier de grandes efficacités de propulsion avec un mouvement optimal du profil. Une flexibilité optimale semble également améliorer l'efficacité d'extraction de puissance. Enfin, une étude sur l'autopropulsion d'un profil oscillant a donné des résultats préliminaires et a ouvert une nouvelle voie de simulation, plus proche des conditions réelles, pour étudier les performances de propulsion.

ABSTRACT

Flapping wings for flying and oscillating fins for swimming stand out as the most complex yet efficient propulsion methods found in nature. Understanding the phenomena involved is a great challenge generating significant interests, especially in the growing field of Micro Air Vehicles. The thrust and lift are induced by oscillating foils thanks to a complex phenomenon of unsteady fluid-structure interaction (FSI). Moreover, the aeroelastic behaviour of a flexible foil may be modified by the large structural displacements caused by a strong coupling with the surrounding flow. The fluid-structure interaction field is actually much wider and intensively studied in a large range of applications : nuclear engineering, aeronautics, power harvesting, civil engineering, biomechanics or microelectronics. This interaction of two strong nonlinear behaviors requires the help of the Computational Fluid Dynamics (CFD) to reproduce and improve our understanding of FSI phenomenon.

Even if an increasing body of literature is now available, much research needs to be done to properly and accurately simulate unsteady fluid-structure interactions with a strong coupling. In the low Reynolds numbers scale, classical aeronautics results with fixed wings are not applicable. Moreover, highly flexible structures (such as biological fins) induce large displacements with geometrical non-linearities. Finally, the thrust generated by the oscillating airfoils requires the simulation of the induced forward motion of this self-propulsive device.

The aim of the dissertation is to develop an efficient CFD framework for simulating the FSI process involved in the propulsion or the power extraction of an oscillating flexible airfoil in a viscous incompressible flow.

The numerical method relies on direct implicit monolithic formulation using high-order implicit time integrators. We use an Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation of the equations designed to satisfy the Geometric Conservation Law (GCL) and to guarantee that the high order temporal accuracy of the time integrators observed on fixed meshes is preserved on ALE deforming meshes. Hyperelastic structural Saint-Venant Kirchhoff model, viscous incompressible Navier-Stokes equations for the flow, Newton's law for the point mass and equilibrium equations at the interface form one large monolithic system. The fully implicit FSI approach uses coincident nodes on the fluid-structure interface, so that loads, velocities and displacements are evaluated at the same location and at the same time. The problem is solved in an implicit manner using a Newton-Raphson pseudo-solid finite

element approach. High-order implicit Runge-Kutta time integrators are implemented (up to 5th order) to improve the accuracy and reduce the computational cost. In this context of stiff interaction problems, the highly stable fully implicit one-step approach is an original alternative to traditional multistep or explicit one-step finite element approaches.

The methodology has been verified with three different test-cases. Thorough time-step refinement studies for a rigid oscillating airfoil on deforming meshes, for flow induced vibrations of a flexible strip and for a self-propulsed flapping airfoil indicate that the stability of the proposed approach is always observed even with large time steps, spurious oscillations on the structure are avoided without any damping and the high order accuracy of the IRK schemes is maintained.

We have applied our powerful FSI framework on three interesting applications, with a detailed dimensional analysis to obtain their characteristic parameters. Firstly, we have studied the vibrational characteristics of a well-documented fluid-structure interaction case : a flexible strip fixed behind a rigid square cylinder. Our results compare favorably with previous works. The accuracy of the IRK time integrators (even for the pressure field of incompressible flow), their unconditional stability and their non-dissipative nature produced results revealing new, never previously reported, higher frequency structural forces weakly coupled with the fluid. Secondly, we have explored the propulsive and power extraction characteristics of rigid and flexible flapping airfoils. For the power extraction, we found an excellent agreement with literature results. A parametric study indicates the optimal motion parameters to get high propulsive efficiencies. An optimal flexibility seems to improve power extraction efficiency. Finally, a survey on flapping propulsion has given initial results for a self-propulsed airfoil and has opened a new way of studying propulsive efficiency.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES ANNEXES	xviii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xix
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	4
2.1 Profils oscillants	4
2.1.1 Diverses applications	6
2.1.2 Description du problème	7
2.1.3 Simulations et résultats	16
2.2 Interaction fluide-structure en grands déplacements	26
2.2.1 Déformation du domaine fluide	27
2.2.2 Modélisation de la structure	30
2.2.3 Couplage IFS	37
2.2.4 Voies de recherche pour les IFS	38
2.3 Intégration en temps	40
2.3.1 Problèmes raides	41
2.3.2 Intégration en temps des IFS	44
2.3.3 Schéma de Runge-Kutta implicite Radau-IIA	48
2.3.4 Une nouvelle approche d'intégration en temps	49
2.4 Conclusion	49

CHAPITRE 3	MÉTHODOLOGIE	51
3.1	Analyse dimensionnelle	51
3.1.1	Hypothèses	51
3.1.2	Variables d'un problème général d'IFS	52
3.1.3	Analyse couplée	53
3.1.4	Cas particuliers	57
3.2	Équations	59
3.2.1	Équations fluides	60
3.2.2	Équations structurelles	61
3.2.3	Interface fluide-structure	62
3.2.4	Équations de la masse ponctuelle	62
3.2.5	Adimensionalisation des équations	63
3.3	Déformation du domaine fluide	71
3.3.1	Approche pseudo-solide	72
3.3.2	Zonage du maillage	73
3.3.3	Approche non-linéaire	74
3.4	Intégration en temps	76
3.4.1	Schémas d'Euler et de Crank-Nicolson implicites	77
3.4.2	Schémas de Runge-Kutta	78
3.4.3	Formulation respectant la GCL	85
3.5	Stratégie de résolution	87
3.5.1	Méthode des éléments finis	87
3.5.2	Calcul des réactions pour les IRK	88
3.5.3	Approche monolithique	90
3.5.4	Imposition des conditions aux limites	94
3.5.5	Méthode de Newton-Raphson	96
CHAPITRE 4	VÉRIFICATIONS	98
4.1	Définitions des normes d'erreur	99
4.1.1	Interpolation temporelle de la solution	99
4.1.2	Domaine temporel	99
4.1.3	Domaine spectral	101
4.1.4	Normes <i>Énergie</i> , $L2p$ et $H1p$	101
4.2	Profil rigide oscillant	102
4.2.1	Description du cas	102
4.2.2	Taux de convergence	103

4.2.3	Efficacité des schémas IRK	107
4.3	Languette flexible encastrée	111
4.3.1	Description du problème	111
4.3.2	Taux de convergence	112
4.3.3	Discussion	115
4.4	Profil autopropulsé	119
4.4.1	Description du problème	119
4.4.2	Taux de convergence	120
4.4.3	Discussion	122
4.5	Conclusion	127
CHAPITRE 5	RÉSULTATS	129
5.1	Étude du problème de Wall	129
5.1.1	Description du cas	130
5.1.2	Comportement vibratoire	134
5.1.3	Discussion	148
5.2	Performances d'un profil oscillant	150
5.2.1	Description du problème	150
5.2.2	Performances d'un profil oscillant	153
5.2.3	Conclusion	161
5.3	Profil autopropulsé	163
5.3.1	Description du cas	163
5.3.2	Résultats préliminaires	164
5.3.3	Discussion	166
CHAPITRE 6	CONCLUSION	168
6.1	Synthèse des travaux	168
6.2	Limitations de l'étude	170
6.3	Travaux et améliorations futures	170
Références	172
ANNEXES	186

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Nombre de Reynolds et autres ordres de grandeurs caractéristiques pour quelques créatures vivantes, <i>Kitty Hawk</i> : l'avion des frères Wright et l'Airbus A380. ^a En prenant : $\nu_{air} = 1.5 \times 10^{-5} m^2/s$, $\nu_{sang} = 10^{-5} m^2/s$ et $\nu_{eau} = 10^{-6} m^2/s$	6
Tableau 2.2	Différentes définitions du rendement selon les applications.	14
Tableau 2.3	Principales études expérimentales : application à la propulsion, au vol stationnaire (<i>hover</i>), à l'extraction de puissance ou à l'étude précise de l'écoulement autour d'un profil oscillant (oscill.), flexibilité selon la corde (C) ou l'envergure (E), mouvements (Mvt) de rotation (R) et de battement (B) ou asymétrique (asym) pour le vol stationnaire.	18
Tableau 2.4	Principales études numériques pour les profils oscillants : équations fluides et méthodes de résolution.	20
Tableau 2.5	Principales études numériques pour l'extraction de puissance : équations fluides et méthodes de résolution.	22
Tableau 2.6	Principales études numériques pour la propulsion : équations fluides et méthodes de résolution.	23
Tableau 2.7	Rendements optimaux pour l'extraction de puissance.	24
Tableau 2.8	Performances optimales pour la propulsion.	26
Tableau 2.9	Principales études numériques IFS sur des profils oscillants.	40
Tableau 2.10	Propriétés de stabilité de différents schémas implicites. Pour les schémas IRK, s représente le nombre d'étages.	43
Tableau 2.11	Réduction d'ordre des schémas IRK appliqués aux problèmes raides avec un pas de temps constant.	44
Tableau 2.12	Estimation de l'erreur pour les problèmes d'index 2 [1].	45
Tableau 2.13	Caractéristiques de quelques schémas appliqués aux IFS. Couplage (étagé (<i>segregated</i>), mono. : monolithique), intégrateur en temps pour le fluide/la structure(IMEX : implicite/explicite Runge-Kutta, ERK : Runge-Kutta explicite, IRK : Runge-Kutta implicite), la précision en temps annoncée, utilisation d'une approche ALE, respect de la GCL, occurrence d'une étude de convergence en temps et incompressibilité de l'écoulement.	47
Tableau 3.1	Paramètres pertinents pour différents problèmes d'IFS.	56

Tableau 3.2	Nombres adimensionnels caractéristiques de similitude pour différents problèmes d'IFS.	71
Tableau 3.3	Evolution du module d'Young pour l'approche linéarisée	76
Tableau 4.1	Ordres de convergence de l'erreur $eRMS(F_y)$ des schémas IRK.	106
Tableau 4.2	Ordres de convergence de l'erreur spatiale pour les normes $\acute{E}nergie$, $L2p$ et $H1p$ pour les schémas IRK à $t = 10s$	107
Tableau 4.3	Convergence de la distance parcourue x_{max} et de la vitesse moyenne u_{avg} de la masse ponctuelle pour $t \in [20 : 50s]$	122
Tableau 4.4	Ordres de précision sur le mouvement de la masse ponctuelle pour différents intervalles de temps.	126
Tableau 4.5	Ordres de précision sur les efforts aérodynamiques pour différents intervalles de temps.	126
Tableau 5.1	Paramètres dimensionnels et adimensionnels pour les cas de Wall et d'Hübner.	131
Tableau 5.2	Fréquences modales du déplacement vertical y (en Hz) avec IRK3 - $\Delta t = 5. 10^{-4}s$	137
Tableau 5.3	Comparaison des résultats obtenus pour les fréquences de la force verticale (en Hz) avec ceux de la littérature.	137
Tableau 5.4	Fréquences modales du déplacement vertical (en Hz) avec IRK3 - $\Delta t = 5. 10^{-4}s$	148
Tableau 5.5	Résultats du raffinement en pas de temps pour un profil oscillant avec $(f^* = 0.14, \theta_0 = 76.33^\circ)$	155
Tableau 5.6	Efficacité de propulsion η_p (en %) dans l'espace paramétrique (f^*, θ_0)	156
Tableau 5.7	Comparaison des puissances et des efficacités d'extraction de puissance entre des profils rigide et flexible.	158

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Mouvement 2D du profil oscillant.	8
Figure 2.2	Profils oscillants : 2 modes de fonctionnement	10
Figure 2.3	Modélisation d'une structure aéroélastique, tiré de [2]	33
Figure 2.4	Crank-Nicolson (non <i>L-stable</i>) versus Euler implicite (<i>L-stable</i>), tiré de [1]	42
Figure 3.1	Notation du problème fluide-solide selon la configuration.	60
Figure 3.2	Maillage déformé pour un angle de rotation $\theta_0 = 90^\circ$	74
Figure 3.3	Convergence des méthodes d'intégration en temps pour une problème simplifié.	84
Figure 3.4	Maillage non-structuré : éléments de Taylor-Hood et couplage implicite à l'interface fluide-structure.	88
Figure 3.5	Matrice globale pour le cas d'un profil flexible (encasté ou oscillant)	91
Figure 3.6	Matrice globale pour le cas d'un profil rigide autopropulsé	92
Figure 3.7	Modélisation pour une structure flexible autopropulsée.	94
Figure 3.8	Matrice globale pour le cas d'un profil flexible autopropulsé.	95
Figure 3.9	Repliement du maillage avec des conditions aux limites explicites.	96
Figure 4.1	Interpolation temporelle de la solution pour 2 pas de temps Δt_1 et Δt_2	100
Figure 4.2	Conditions aux limites pour le profil rigide oscillant.	103
Figure 4.3	Maillage non-déformé - 10 513 nœuds - 2 zones.	104
Figure 4.4	Convergence de l'erreur temporelle e_{RMS} sur la force verticale F_y pour $t \in [8 - 10s]$	105
Figure 4.5	Convergence de l'erreur spatiale pour les normes <i>Énergie</i> , $L2p$ et $H1p$ pour les schémas IRK à $t = 10s$	108
Figure 4.6	Temps de simulation réels des schémas IRK (en min).	110
Figure 4.7	Géométrie et conditions aux limites pour la languette flexible encastée.	111
Figure 4.8	Maillage non-déformé pour la languette flexible encastée - 10179 nœuds.	112
Figure 4.9	Convergence des déplacements (x,y) de l'extrémité libre pour $t \in [10; 25s]$	114
Figure 4.10	Convergence des déplacements (x,y) de l'extrémité libre $t \in [0; 10s]$	116
Figure 4.11	Convergence des déplacements (x,y) de l'extrémité libre $t \in [0; 15s]$	117
Figure 4.12	Conditions aux limites pour le profil autopropulsé.	120
Figure 4.13	Déplacement x_{mp} et vitesse u_{mp} de la masse ponctuelle pour $t \in [0 : 50s]$ et $\Delta t = 9T/4000$	121
Figure 4.14	Convergence des erreurs relatives sur x_{max} et u_{avg} de la masse ponctuelle pour $t \in [20 : 50s]$	123

Figure 4.15	Convergence des erreurs temporelle et spectrale sur le déplacement x_{mp} et la vitesse u_{mp} de la masse ponctuelle pour $t \in [20 : 50s]$	124
Figure 4.16	Convergence des erreurs temporelle et spectrale sur les efforts pour $t \in [20 : 50s]$	125
Figure 5.1	Champs de vorticité obtenus avec IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-3}s$ et 79 850 nodes.	130
Figure 5.2	Géométrie et conditions aux limites pour le cas de Wall.	132
Figure 5.3	Maillages utilisés pour le problème de Wall.	132
Figure 5.4	Détails des maillages utilisés pour le problème de Wall.	133
Figure 5.5	Maillage non-déformé pour le cas de Wall - 10179 nœuds.	134
Figure 5.6	Convergence en maillage du déplacement vertical y de l'extrémité libre.	135
Figure 5.7	Convergence en maillage des erreurs relatives sur les déplacements et les efforts.	136
Figure 5.8	Champs de vorticité obtenus avec IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-3}s$ et un maillage plus fin : 79 850 nœuds.	138
Figure 5.9	Comportement vibratoire, $\Delta t = 5.10^{-3}s$ pour IRK1 et IRK3 : a) Déplacement vertical y de l'extrémité libre, b) Spectre de Fourier de y , c) Force verticale F_y , d) Spectre de Fourier de F_y	139
Figure 5.10	Comportement vibratoire, $\Delta t = 5.10^{-4}s$ pour IRK1 et IRK3 : a) Déplacement vertical y de l'extrémité libre, b) Spectre de Fourier de y , c) Force verticale F_y , d) Spectre de Fourier de F_y	140
Figure 5.11	Comportement vibratoire, $\Delta t = 5.10^{-3}s$ pour IRK3 et IRK5 : a) Déplacement vertical y de l'extrémité libre, b) Spectre de Fourier de y , c) Force verticale F_y , d) Spectre de Fourier de F_y	141
Figure 5.12	Comportement vibratoire, $\Delta t = 5.10^{-4}s$ pour IRK3 et $\Delta t = 6.25 \cdot 10^{-4}s$ pour IRK5 : a) Déplacement vertical y de l'extrémité libre, b) Spectre de Fourier de y , c) Force verticale F_y , d) Spectre de Fourier de F_y . . .	142
Figure 5.13	Résultats pour le cas d'Hübner avec IRK5 - $\Delta t = 6.25 \cdot 10^{-4}s$	144
Figure 5.14	Résultats obtenus par De Nayer[3] avec un schéma de Newmark amorti.	145
Figure 5.15	Champs de pression à différents temps t , obtenu avec IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-4}s$	146
Figure 5.16	Champs de pression sur une demi-période obtenus par De Nayer[3]. .	147
Figure 5.17	évolution de la force verticale F_y appliquée à la structure comparée à celle du déplacement vertical de l'extrémité libre.	149
Figure 5.18	Champs de vorticité pour $(\theta_0 = 60^\circ, f^* = 0.18)$, obtenus avec IRK3 - $\Delta t = \Delta t_0/2$ et 120 386 nœuds.	151
Figure 5.19	Conditions aux limites pour le profil rigide oscillant.	152

Figure 5.20	Maillage initial avec 2 zones - 10513 nœuds.	152
Figure 5.21	Évolution des puissances sur une période pour le cas : ($\theta_0 = 60^\circ$, $f^* = 0.18$).	153
Figure 5.22	Cartographie de l'efficacité d'extraction de puissance η_e dans l'espace paramétrique (f^*, θ_0).	154
Figure 5.23	Cartographie de l'efficacité d'extraction de puissance η_e obtenue par Kinsey et al. [4]	155
Figure 5.24	Cartographie du coefficient de poussée C_T dans l'espace pa- ramétrique (f^*, θ_0).	157
Figure 5.25	Comparaison de la puissance totale instantanée entre des profils rigide et flexibles sur une période de battement.	159
Figure 5.26	Comparaison des champs de pression entre un profil rigide à gauche et un profil flexible ($E = 200$) à droite pour ($f^* = 0.18, \theta_0 = 60^\circ$). . . .	160
Figure 5.27	Comparaison des coefficients de puissances totales instantanées et de poussée sur une période de battement pour différentes flexibilités du profil : ($f^* = 0.20, \theta_0 = 40^\circ$).	162
Figure 5.28	Conditions aux limites pour le profil autopropulsé.	164
Figure 5.29	Avancée du profil - isolignes de vitesse horizontale U_{mp} pour $t=T/4$, $T/2$, $3T/4$, T , $5T/4$, $2T$, $6T$, $12T$	165
Figure 5.30	Vitesse U_{mp} (en corde/période) des deux profils de masse $m = 0.30$ et $m = 1.20$	166
Figure 5.31	Déplacement x_{mp} (en corde) des deux profils de masse $m = 0.30$ et $m = 1.20$	167
Figure A.1	Fonction de raccord C^2	187
Figure A.2	Dérivées première et seconde de la fonction g de raccord C^2	187
Figure A.3	Évolution de l'amplitude de translation et de l'angle de rotation. . . .	188
Figure A.4	Mouvement du profil NACA0015 au départ.	189

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Fonction lissante du mouvement	186
Annexe B	Liste des publications reliées à la thèse	190

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Acronymes

BDF	Backward Differentiation Formula
CFD	Computational Fluid Dynamics
EDA	Équation Différentielle Algébrique
GCL	Loi de Conservation Géométrique
IFS	Interaction Fluide-Structure
IRK	Runge-Kutta Implicite
N-S	Navier-Stokes

Nombres adimensionnels

C_r	nombre de Cauchy
M_{rigide}	nombre de Masse pour un profil rigide
M_{flex}	nombre de Masse pour un profil flexible
f^*	fréquence réduite
Re	nombre de Reynolds
St	nombre de Strouhal

Caractères usuels

c	corde d'un profil
C_D	coefficient de traînée
C_L	coefficient de portance
C_T	coefficient de poussée
D	traînée
\mathbf{E}	tenseur de Green-Lagrange
\mathbf{f}	vecteur des forces volumiques
\mathbf{F}	tenseur gradient de la transformation
\mathbf{h}	tenseur gradient des déplacements
\mathbf{I}	tenseur de la matrice identité
J	jacobien du tenseur de passage $\overline{\mathbf{F}}$
$\overline{\overline{J}}$	matrice jacobienne du tenseur $\overline{\mathbf{F}}$, jacobien numérique
L	portance

$\hat{\mathbf{n}}$	normale unitaire sortante
s	nombre de sous-pas de temps d'un intégrateur en temps
T	poussée

Lettres calligraphiques

\mathcal{R}	système matriciel à résoudre
\mathcal{U}	variable générique

Lettres grecques

α	angle d'incidence
α_{max}	angle d'incidence efficace maximum
γ	coefficient de Lamé
Γ	frontière du domaine
Γ_D	frontière du domaine où on impose des conditions de Dirichlet
Γ_I	frontière associée à l'interface fluide-solide
Γ_N	frontière du domaine où on impose des conditions de Neumann
$\delta\Gamma$	partie infinitésimale de la frontière
Δt	pas de temps
η	rendement
η_e	rendement d'extraction de puissance
η_{id}	rendement idéal d'extraction de puissance
η_p	rendement de propulsion
μ	module de cisaillement (coefficient de Lamé)
μ_f	viscosité dynamique du fluide
ν	coefficient de Poisson
ρ	masse volumique
$\boldsymbol{\sigma}_f$	tenseur des contraintes fluides
$\boldsymbol{\sigma}_c$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}_k$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff
$\boldsymbol{\sigma}_l$	tenseur des contraintes de Piola-Lagrange
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses
$\boldsymbol{\chi} = (\xi, \eta)$	vecteur des déplacements

Ω	domaine de calcul
$\partial\Omega$	frontière du domaine de calcul
$d\Omega$	partie infinitésimale du domaine

Indices et exposants

$*$	associé à une grandeur adimensionnelle
-1	inverse
exa	solution exacte
f et f	associés au fluide
h	solution éléments finis
i	composante d'un vecteur,
ij	composante d'un tenseur d'ordre 2
ini	associé à la configuration initiale
int	associé à l'interface
n	valeur au temps t^n
mp et mp	associés à la masse ponctuelle
ps et ps	associés au pseudo-solide
ref	solution de référence
s et s	associés au solide
T	transposée

Symboles

∇	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\frac{\partial \cdot}{\partial \cdot}$	dérivée partielle (ou eulérienne)
$\ \cdot \ $	norme

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les détails font la perfection et la perfection n'est pas un détail.

Léonard de Vinci

Improbable mélange de légèreté, de puissance et de contrôle, l'envolée d'un oiseau est un spectacle extraordinaire que les hommes tentent d'imiter depuis d'innombrables générations. C'est le mythe d'Icare. Ce n'est toutefois qu'à la fin du XIX^e siècle qu'un homme a pu *voler*¹, en la personne d'Otto Lilienthal à l'aide de ses nombreux planeurs. Ainsi, c'est essentiellement la phase de *vol plané* qui est la source de l'aviation telle qu'on la connaît aujourd'hui. En ajoutant des moteurs à ces "planeurs" dont les ailes fixes constituent d'énormes surfaces portantes, on a développé des machines volantes de plus en plus performantes reposant sur ce simple principe, de l'avion des frères Wright en 1903 jusqu'à l'airbus A380 en 2005.

Bien que les battements d'ailes d'un oiseau, tout comme le mouvement des nageoires d'un poisson, fassent partie des systèmes de propulsion les plus efficaces qu'on puisse trouver dans la nature, cette forme de vol a donc été laissée de côté jusqu'à maintenant au profit de différents types de moteurs. En effet, à l'échelle d'un frère Wright (et à plus forte raison à celles des 550 personnes dans un A380), il paraît impensable de propulser un avion avec des ailes de plusieurs mètres de long en battement. Imaginez une mouche de 80 mètres d'envergure ! De plus, à ces échelles, les rendements des moteurs à hélices ou à réactions sont très bons.

Depuis quelques années pourtant, les progrès de la miniaturisation ont permis la conception d'avions sans pilote de la taille d'un oiseau, appelés *micro-drones*. Destinés à la surveillance (militaire et civile), leur charge utile ainsi que leurs dimensions sont très réduites. A cette échelle, le rendement d'un moteur décroît fortement alors que la nature nous montre l'efficacité de la propulsion par des ailes battantes. L'utilisation d'ailes générant à la fois de la portance et une poussée grâce à leur mouvement semble être une voie des plus prometteuses.

Il est donc très intéressant de comprendre les phénomènes impliqués dans ce mode de propulsion. Toutefois, cela reste encore un grand défi. Certes, chacun d'entre nous a pu observer des centaines de fois le vol d'un oiseau dans le ciel, les déplacements circulaires d'un poisson dans un aquarium et même expérimenter soi-même la propulsion marine en se jetant dans une piscine. Mais voir une mouche se poser sur son pain ne signifie pas qu'on sait comment elle arrive à se déplacer aussi vite sans qu'on puisse l'attraper ! De plus, à cause

1. Les frères Montgolfier ont toutefois pu *s'élever* dans les airs dès 1783 à bord de leur engin "plus léger que l'air".

de la grande différence d'échelle, les résultats des études aéronautiques classiques portant sur des ailes d'avions fixes sont inutiles ici, les caractéristiques aérodynamiques (portance, traînée) étant bien différentes. Plus délicat encore, les forces de portance et de poussée sont ici produites par le battement des ailes (non-fixes) sur le fluide environnant, on parle alors d'*interaction fluide-structure* (IFS) ou plus précisément d'*aéroélasticité*. A l'inverse le fluide ainsi perturbé va agir sur la structure des ailes dont les déformations et les déplacements seront d'autant plus forts que sa flexibilité sera grande. Les petites dimensions des micro-drones ainsi que leur faible poids contribuent à accroître fortement la flexibilité des ailes tout comme celles des oiseaux, les palmes d'un plongeur ou les nageoires des poissons. On fait alors face à un phénomène complexe de *couplage fort* qui altère les performances de l'aile déformée, bien différentes de celles du profil non-déformé.

Plus généralement, on parle d'IFS lorsqu'un solide est en présence d'un fluide ou du moins lorsque les mouvements de l'un influencent les déplacements de l'autre. Les domaines d'application concernés sont donc extrêmement variés, du monde des transports à celui du génie nucléaire, de l'aéronautique au génie civil et de la biomécanique à la microélectronique. C'est pourquoi les problèmes d'interactions fluide-structure suscitent depuis des années un intérêt croissant en ingénierie et deviennent de plus en plus incontournables. Toutefois, les comportements non-linéaires des fluides et des solides complexes soumis à de grands déplacements ainsi que la déformation des interfaces induisent de nombreuses difficultés à surmonter. Il est donc clair que la résolution analytique de tels problèmes est impossible. Seules des expérimentations minutieuses et l'utilisation de simulations numériques complexes par ordinateur peuvent reproduire de tels problèmes et en augmenter notre compréhension.

Dans l'optique de comprendre et de contrôler ces processus d'extraction de puissance et de propulsion grâce à des profils flexibles oscillants, ce présent projet de recherche se concentre sur la simulation numérique des phénomènes d'interaction fluide-structure entre un fluide visqueux et incompressible et une structure en grands déplacements. L'étude s'appuie donc en grande partie sur la mécanique des fluides assistée par ordinateur ou CFD (*Computational Fluid Dynamics*) qui a atteint un niveau de maturité considérable. De même la modélisation éléments finis des structures donne depuis bien longtemps d'excellents résultats. En revanche, le couplage entre ces deux disciplines est quelque chose de beaucoup plus récent et ouvre la porte à de nombreuses améliorations avec en point de mire le contrôle de phénomènes d'interactions fluide-structure afin d'améliorer les efficacités des profils oscillants.

Le projet présenté ici se trouve donc dans la continuité de ce qui se fait en IFS et propose d'apporter une contribution nouvelle à l'analyse de phénomènes d'interactions fluide-structure dans la perspective de simuler numériquement des processus d'extraction de puissance d'un écoulement fluide et de propulsion grâce à un profil flexible en grands

déplacements. On s'appuiera ainsi sur l'approche monolithique d'Etienne[5, 6] pour traiter les phénomènes d'interactions fluide-structure instationnaires. On devra alors développer les outils nécessaires à la simulation numérique d'un profil oscillant en grands déplacements, améliorer la précision et la rapidité des algorithmes de calcul des phénomènes d'IFS instationnaires, vérifier et valider l'approche adoptée et l'appliquer à une large gamme de mouvement de profils flexibles oscillants en grands déplacements afin de qualifier et de quantifier les phénomènes mis en jeux.

Ce mémoire comporte 5 chapitres. Pour commencer, au chapitre 2, une revue bibliographique permet de replacer le présent travail dans le contexte des réalisations antérieures et des recherches actuelles ainsi que de souligner les diverses voies restant à explorer. Cela permet de fixer le but et les objectifs de cette étude. Le chapitre 3 présente l'ensemble de la méthodologie mise en place pour ce projet de recherche. Tout d'abord, une analyse dimensionnelle générale des problèmes d'interaction fluide-structure est menée de manière détaillée. On expose ensuite la modélisation mathématique du problème fluide-solide constituée des équations pour le fluide, pour le solide, pour le couplage fluide-solide et pour la déformation du domaine fluide. Enfin, la technique d'intégration en temps utilisée est décrite. La vérification et la validation du code présentées au chapitre 4 se composent d'une vérification des schémas d'intégration en temps, d'une étude comparative avec des données numériques de résultats obtenus pour un exemple d'extraction de puissance par un profil oscillant et d'une validation de la modélisation des interactions fluide-structure. Le code ainsi vérifié et validé, on expose au chapitre 5 les résultats obtenus pour des exemples d'interaction fluide-structure en vibration, en extraction de puissance et en propulsion. On termine naturellement ce mémoire en exposant les conclusions et les voies restant à explorer par de futurs travaux sur les phénomènes d'interaction fluide-structure instationnaires, notamment leur optimisation et contrôle.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

Afin de situer notre travail par rapport à l'état des recherches actuelles et de déterminer les voies restant à explorer, il s'avère essentiel de se baser sur une revue de littérature critique et pertinente. Hormis certains travaux précurseurs, souvent expérimentaux ou basés sur des théories analytiques, on concentrera cette revue sur les études les plus récentes afin de déterminer l'avancement actuel des connaissances. En effet, malgré d'énormes progrès, la simulation, l'analyse et la caractérisation des interactions fluide-structure instationnaires (à bas Reynolds) restent aujourd'hui encore incomplètes comme le soulignent Shyy *et al.* [7] dans l'introduction de leur revue de littérature sur l'utilisation des profils oscillants pour les micro-drones (MAV) datant du mois d'août 2008. Ceci est d'autant plus vrai lorsqu'on superpose un mouvement imposé de battement d'ailes, une déformation en grands déplacements due à la flexibilité de la structure et un mouvement libre lorsqu'une force de poussée est produite. Cette superposition de complexités posent de tous nouveaux défis qui ne se retrouvent que dans une littérature très récente, mais toutefois grandissante à cause de leur large champ d'applications. Notamment, l'étude des oiseaux nous montre un parfait exemple d'aérodynamique instationnaire avec des ailes flexibles à géométrie variable s'adaptant rapidement aux conditions de vol pour se propulser.

Ce chapitre exposera ainsi l'état des connaissances dans les trois domaines suivants : l'analyse et la caractérisation de profils oscillants à bas Reynolds, les interactions fluide-structure en grands déplacements et enfin l'intégration en temps des phénomènes instationnaires. Ceci nous permettra de souligner les voies restant encore à explorer : amélioration des modèles numériques, généralisation des approches IFS, utilisation de profils flexibles en grands déplacements et développement de schémas d'intégration en temps plus efficaces.

2.1 Profils oscillants

En 1982, McCroskey [8] faisait un état des lieux des recherches concernant les écoulements instationnaires autour des profils aérodynamiques. C'était un tout nouveau champ d'exploration pour la simulation, ayant alors pour but la réduction des effets indésirables de phénomènes comme les vibrations, le flottement (*flutter*) ou le tremblement (*buffeting*) des ailes d'avion. Ces phénomènes instationnaires, néfastes et non maîtrisés, devaient alors être évités ou du moins réduits pour améliorer les performances des avions.

Pourtant, en parallèle, McKinney et DeLaurier voyaient déjà les avantages potentiels de ces phénomènes instationnaires, en mettant volontairement un profil en mouvement pour extraire l'énergie du fluide qui l'entoure [9], c'est alors du flottement "avantageux". Le but n'était déjà donc plus de supprimer le mouvement de l'aile mais de le maîtriser pour l'utiliser. L'idée était donc déjà là mais il fallu attendre presque 20 ans avant que les chercheurs commencent à emprunter cette voie de manière significative. D'ailleurs, ce n'était plus pour extraire de la puissance, mais plutôt pour en créer. Dans ce laps de temps, les progrès de la technique en miniaturisation et l'augmentation stupéfiante de la puissance des ordinateurs ont en effet permis le développement de petits véhicules volants ressemblant à de gros oiseaux, les micro-drones ou *Micro-Aerial Vehicles* (MAV). Bientôt, ils auront la taille d'un insecte et on devine alors la nécessité de sources de propulsion adaptées. On doit en effet noter que la vitesse d'un oiseau ainsi que ses dimensions sont petits et qu'on se trouve dans le régime des écoulements à faibles nombres de Reynolds (voir tableau 2.1). Dans la nature, les ailes battantes pour voler ou les nageoires pour nager, passent pour les méthodes de propulsion les plus complexes mais aussi les plus efficaces connues à ce jour. Comprendre les phénomènes naturels impliqués est donc un beau défi afin de les transposer au domaine du génie. En effet, à ces faibles nombres de Reynolds, les caractéristiques aérodynamiques d'un profil oscillant (portance, traînée) diffèrent significativement de celles habituellement considérées pour des ailes fixes utilisées en aéronautique. Avec des yeux d'ingénieurs, on peut ainsi se représenter un insecte ou un oiseau comme un corps élancé pourvu d'au moins deux profils oscillants de chaque côté.

Ainsi, les revues de littérature récentes [13, 14, 15, 16, 7, 17, 18] portant sur les profils oscillants montrent que les recherches actuelles dans ce domaine sont étroitement liées aux MAVs, ou à la propulsion animale, source première d'inspiration. Dans un premier temps, nous verrons donc les différentes applications d'un profil oscillant à bas Reynolds. Ensuite, on exposera de manière qualitative les divers paramètres et les principaux phénomènes physiques mis en jeu lors du battement d'un profil oscillant. Enfin, on fera un état des lieux des différentes études déjà menées, expérimentales et numériques, et des résultats qu'elles fournissent.

On doit ici préciser deux hypothèses simplificatrices considérées dans ce projet : des écoulements 2D et laminaires. La simulation 3D de profils oscillants reste encore trop dispendieuse en ressources et les études sont encore très restreintes même dans le domaine de la propulsion [15, 19, 20, 21, 22]. En résolvant les équations simplifiées d'Euler, Neef et Hummel [22] concluent que les effets 3D (traînée supplémentaire en extrémité d'aile) réduisent considérablement l'efficacité de génération de poussée par rapport au cas 2D. Il faut donc être conscient de cette limitation même si certains auteurs soutiennent que l'approche 2D est une

Espèce	Longueur l en m	Vitesse U en m/s	Fréquence f en Hz	Reynolds ^a $Re = Ul/\nu$	Fréq. réduite $k = 2\pi fl/U$
Spermatozoïde [10]	0.00005	0.0001	15	0.0005	50
Petite guêpe [10]	0.006	1.0	60	400	2.25
Colibri [11]	0.05	15	100	50 000	2.10
Pigeon [10]	0.1	10.	0.8	70 000	0.25
Poisson [10]	0.5	1.	0.3	500 000	0.95
Nageur [12]	2.	1.	2.	2 000 000	25
Cétacé [12]	4.	3.	0.75	15 000 000	6.25
Kitty Hawk	6.	14.	-	5 600 000	-
A380 (décollage)	80.	70.	-	370 000 000	-

Tableau 2.1 Nombre de Reynolds et autres ordres de grandeurs caractéristiques pour quelques créatures vivantes, *Kitty Hawk* : l’avion des frères Wright et l’Airbus A380. ^a En prenant : $\nu_{air} = 1.5 \times 10^{-5} m^2/s$, $\nu_{sang} = 10^{-5} m^2/s$ et $\nu_{eau} = 10^{-6} m^2/s$.

très bonne approximation [23, 24]. En outre, on prévoit de faire une étude de ces phénomènes à très faible nombre de Reynolds (autour de 1000) et on considère alors l’écoulement comme laminaire. Cette hypothèse est confortée par les conclusions de Julien *et al.* [25] dans leur étude sur l’extraction de puissance par un profil oscillant. Ils constatent en effet que des grands nombres de Reynolds turbulents (10^5 - 10^6) permettent certes d’accroître le coefficient de portance et retardent la séparation de l’écoulement mais la plupart des résultats qualitatifs obtenus en laminaire ($Re=1100$) restent valables car le phénomène d’extraction de puissance est largement dominé par les effets inertiels. De manière plus quantitative, Young et Lai [26] comparent les résultats obtenus sur un profil en battement (pas de rotation) pour $Re=2.10^4$ avec un code laminaire, un code turbulent et des données expérimentales. Ils concluent que la plupart du temps l’écoulement peut être considéré comme laminaire, en particulier les forces aérodynamiques ne sont affectées que marginalement par les effets turbulents, sauf aux très basses fréquences.

2.1.1 Diverses applications

Comme on vient de le voir, le principe du profil oscillant peut être utilisé tant par la nature que dans le domaine du génie pour générer de la puissance ou en récolter. Les études concernant l’utilisation de profils oscillants pour l’extraction de puissance restent très peu nombreuses alors qu’elles sont de plus en plus nombreuses dans le domaine de la propulsion et de la sustentation des insectes, des oiseaux et aussi désormais des MAVs, technologie en plein développement.

Certes, dès 1981, McKinney et DeLaurier utilisaient un profil rigide oscillant, nommé

“wingmill” pour l’extraction d’énergie dans des travaux précurseurs expérimentaux [9]. Mais comme le soulignent Jones *et al.* en 2003 [27], peu de travaux sur le sujet ont été publiés tant en expérimental qu’en numérique durant plus de 20 ans. On note parmi eux, celui de Jones et Platzer [28] qui expose une méthode de simulation numérique des profils oscillants pour caractériser les phénomènes d’extraction de puissance et de propulsion. Ils concluent que pour un profil en rotation et en translation verticale, l’amplitude de rotation du profil doit être plus grande que l’angle d’attaque induit par le mouvement horizontal du profil pour obtenir de l’extraction de puissance. Prolongeant ce travail, Davids [29] et Lindsey [30] montrent que cette technique a du potentiel pour une utilisation commerciale. En 2006, Kinsey et Dumas [31] présentent une étude numérique très complète où ils identifient les influences des différents paramètres et les phénomènes physiques menant à de fortes efficacités. Enfin, Julien *et al.* [25] complètent cette étude par l’introduction des phénomènes turbulents. Les études concernant l’extraction de puissance par un profil oscillant sont donc assez peu nombreuses. Toutefois, comme le relève les articles précédents [28, 31], il suffit de changer certains paramètres pour donner de la puissance au fluide au lieu de lui en prélever. On tombe alors dans les domaines de la propulsion qui fait l’objet de très nombreuses études tant dans la perspective de produire une poussée (*thrust*) [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44] pour avancer (*forward flight*) que dans celle de générer la portance nécessaire à la sustentation pour le vol stationnaire (*hovering* [45, 46, 47]). En effet, comme on l’a vu, un oiseau peut être vu comme un corps avec deux profils oscillants. Il en va de même pour les mammifères marins dont la nageoire propulsive est similaire à un profil en mouvement 2D. Ainsi, les études biologiques visant à trouver les paramètres optimum dans la nature sont nombreuses, tant par l’expérimentation [48, 49, 50, 51] que par la simulation numérique [12, 52]. Toutefois, ce sont les recherches dans le domaine des MAVs qui sont en pleine expansion et utilisent de plus en plus de simulations numériques [19, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 51]. Il existe même des micro-sous-marins (*Autonomous Underwater Vehicles*, AUV) [60, 14] mimant le mode de propulsion d’un poisson. On doit aussi noter l’existence de l’ornithoptère [61], petit avion développé par l’équipe du Pr. DeLaurier dont la propulsion est assurée par ses ailes oscillantes !

2.1.2 Description du problème

Nous voulons ici préciser notre sujet de recherche en exposant les principaux paramètres définissant le problème des profils oscillants ainsi que les principaux phénomènes physiques mis en jeu.

A. Paramètres caractéristiques

Pour un profil 2D oscillant dans un écoulement laminaire, trois types de paramètres décrivent le problème : les propriétés du fluide, les propriétés du solide (le profil) et les caractéristiques du mouvement du profil. Dans un premier temps, on considère le solide comme rigide (voir la section 2.2 pour un profil flexible). Il est donc entièrement caractérisé par sa forme. Quant au fluide, il se caractérise par sa viscosité μ , sa masse volumique ρ et sa vitesse à l'infini U_∞ . Enfin, le profil possède trois degrés de liberté en 2D : une rotation, une translation verticale (le battement) et une autre horizontale. Les possibilités de mouvements dynamiques sont donc infinies et une paramétrisation du mouvement est donc nécessaire. Tous

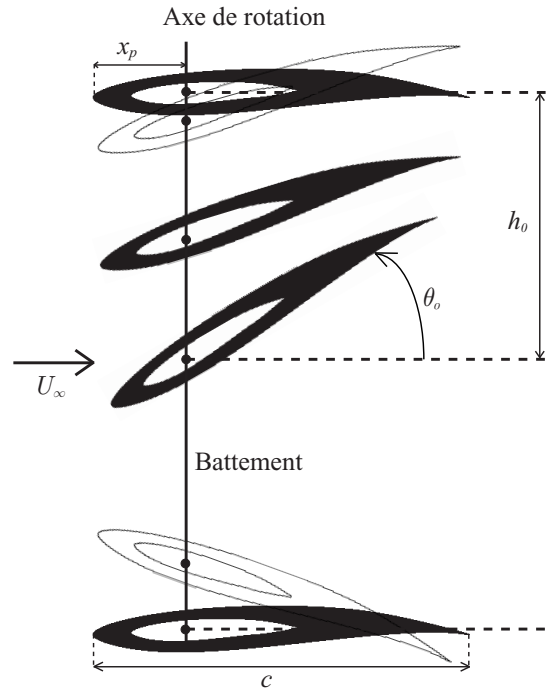


Figure 2.1 Mouvement 2D du profil oscillant.

les auteurs étudiés utilisent des mouvements périodiques sinusoïdaux (sauf dans certaines études d'optimisation [62, 63]) avec une même fréquence d'oscillation $f = \omega/2\pi$ pour les différents degrés de liberté. La quasi-totalité des articles étudiés vont se limiter à 2 degrés de liberté : le battement et la rotation. Ainsi, le mouvement du profil, présenté sur la figure 2.1,

est généralement gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_{av} + \theta_0 \sin(\omega t + \phi) & \text{rotation} \\ h(t) = h_0 \sin(\omega t) & \text{battement} \end{cases}$$

où $\theta(t)$ est l'angle de rotation autour d'un point de la corde c situé à x_p/c , θ_0 , θ_{av} et h_0 sont des constantes et ϕ est l'angle de déphasage entre la rotation et le battement.

On introduit alors plusieurs paramètres adimensionnels, qui peuvent différer selon les auteurs et les applications :

nombre de Reynolds :	$Re = 2\pi \frac{\rho f h_0 c}{\mu}$ $Re = \frac{\rho U_\infty c}{\mu}$	si $U_\infty = 0$ (<i>hovering</i>) [47] sinon
nombre de Strouhal :	$St = \frac{2fh_0}{U_\infty} = \frac{\omega h_0}{\pi U_\infty}$	
fréquence réduite :	$k = \frac{2\pi f c}{U_\infty} = \frac{\omega c}{U_\infty}$ $k = \frac{\pi f c}{U_\infty} = \frac{\omega c}{2U_\infty}$ $f^* = \frac{f c}{U_\infty} = \frac{\omega c}{2\pi U_\infty}$ $k = \pi f c$	dans [16, 29, 30, 17] dans [7, 8, 33, 64] dans [31] si $U_\infty = 0$ (<i>hovering</i>) [47]
angle d'attaque effectif :	$\alpha_e(t) = \arctan \left(-\frac{1}{U_\infty} \frac{\partial h(t)}{\partial t} - \theta(t) \right)$	
angle d'attaque maximum :	$\alpha_{max} \approx \arctan \left(\frac{h_0 \omega}{U_\infty} \right) - \theta_0$	
paramètre de “plumage” : (<i>feathering</i>)	$\chi = \frac{\theta_0}{\arctan \left(\frac{h_0 \omega}{U_\infty} \right)}$	

Ce dernier paramètre χ est utile pour définir de manière simplifiée si on se situe dans la zone d'extraction de puissance ou dans celle de propulsion. En effet, par une approche quasi-statique sur un profil symétrique, on peut montrer que si $\chi < 1$ ($\alpha_{max} > 0$) on est dans une configuration de propulsion alors que si $\chi > 1$ ($\alpha_{max} < 0$) on va extraire de l'énergie comme le montre la figure 2.2. Il est aussi à noter ici qu'une littérature grandissante [27, 65, 66] traite des profils en tandem ; *i.e.* deux profils en interaction. Cette configuration aurait des effets bénéfiques pour la propulsion [16, 67] ainsi que pour l'extraction de puissance [29]. D'autres paramètres peuvent donc être ajoutés, notamment des grandeurs géométriques caractérisant le positionnement relatif de ces deux solides.

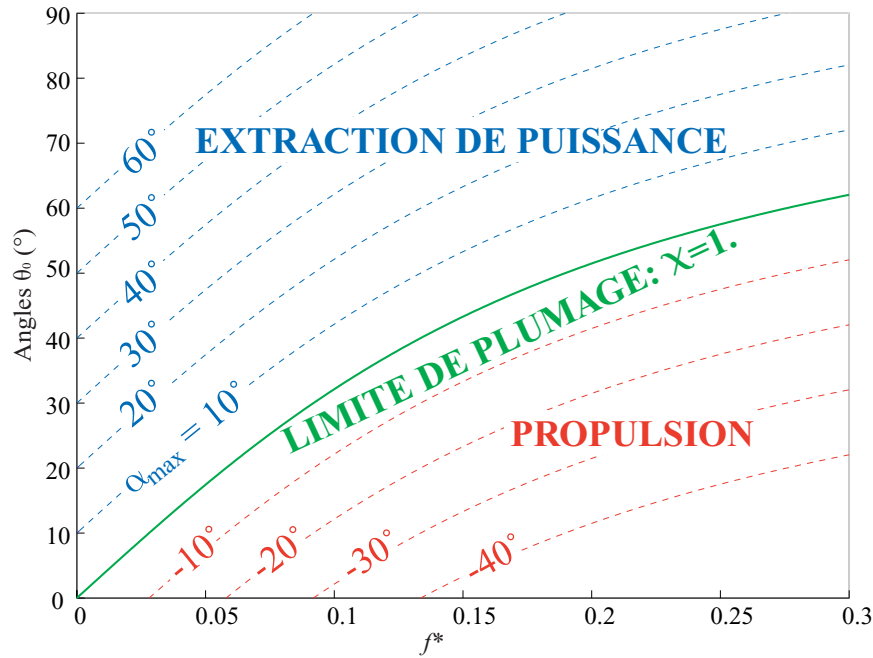


Figure 2.2 Profils oscillants : 2 modes de fonctionnement

Les paramètres présentés jusqu'à présent sont des paramètres "contrôlants", mais il y a aussi des paramètres "résultants" qui vont définir les performances du système physique étudié et vont donc dépendre des applications envisagées (*i.e.* : propulsion, extraction, ...). De manière générale en 2D, se sont 4 coefficients aérodynamiques qui vont être à la base de

toutes les mesures de performances d'un profil oscillant :

$$\begin{aligned}
\text{Coefficient de force horizontale :} \quad C_x(t) &= \frac{F_x(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} \\
\text{Coefficient de poussée :} \quad C_T(t) &= -\frac{F_x(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} \\
\text{Coefficient de force verticale :} \quad C_y(t) &= \frac{F_y(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} \\
\text{Coefficient de moment autour de } x_p : \quad C_M(t) &= \frac{M_{x_p}(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c^2}
\end{aligned}$$

On définit aussi les coefficients adimensionnalisés suivants pour la puissance [31] :

$$\begin{aligned}
\text{Contribution du battement :} \quad C_{P_y}(t) &= \frac{P_y(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^3 c} = \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial h(t)}{\partial t} C_y(t) \\
\text{Contribution de la rotation :} \quad C_{P_\theta}(t) &= \frac{P_\theta(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^3 c} = \frac{c}{U_\infty} \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} C_M(t) \\
\text{Contribution totale :} \quad C_P(t) &= \frac{P(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^3 c} = C_{P_y}(t) + C_{P_\theta}(t)
\end{aligned}$$

Il suffit alors de sommer sur un nombre N de périodes pour obtenir un coefficient de puissance moyenne, autrement dit un coefficient de travail :

$$C_{W_P} = \overline{C_P} = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} C_P(t) dt$$

Concernant la notion de rendement ou d'efficacité, les définitions varient selon les applications et les auteurs ce qui complique la comparaison entre les différentes études. De manière générale, le dictionnaire Larousse¹ définit le rendement comme le *rapport de l'énergie ou d'une autre grandeur fournie par une machine à l'énergie ou à la grandeur correspondante consommée par cette machine*. On doit donc définir une grandeur *consommée* $A_{entrée}$ comme entrée du système et une valeur *utile* A_{sortie} en sortie. Le rendement s'écrit alors :

$$\eta = \frac{A_{sortie}}{A_{entrée}}$$

1. Dictionnaire Larousse en ligne : www.larousse.fr.

Dans le domaine de l'extraction de puissance, l'*efficacité totale* compare la puissance extraite $P = P_y + P_\theta$ avec la puissance P_a disponible dans le fluide [31] :

$$\eta_e = \frac{P_y + P_\theta}{P_a}, \quad \text{avec } P_a = \frac{1}{2}\rho U_\infty^3 d \quad (2.1)$$

où d est l'amplitude maximale parcourue par le profil en battement. Alors que l'*efficacité idéale* utilise la puissance "idéale" comme point de comparaison. Elle est définie à partir de la limite théorique d'extraction de puissance introduite par Betz [9] :

$$\eta_{id} = \frac{P_y + P_\theta}{P_{id}} = \frac{\eta_e}{\eta_{betz}}, \quad \text{avec } P_{id} = \eta_{betz} P_a \quad \text{et} \quad \eta_{betz} = \frac{16}{27} \approx 59\% \quad (2.2)$$

On cherche certes à développer des systèmes passifs récupérant de l'énergie de l'écoulement fluide. Toutefois, les différentes études dans le domaine imposent, au moins en partie, le mouvement de battement du profil (excepté [68]). La définition du rendement devrait donc tenir compte de l'énergie fournie au système pour entretenir ce mouvement. Ou bien, il faudrait considérer des profils libre dont le mouvement est le seul fait de l'interaction avec le fluide.

Pour le mode de propulsion, la grande majorité des auteurs s'accorde pour définir l'efficacité comme le rapport de la puissance de poussée sur la puissance totale nécessaire au mouvement du profil [32, 28, 33, 53, 69, 70, 34, 54, 35, 36, 38, 41]. L'efficacité de propulsion est donc ainsi définie :

$$\eta_p = -\frac{\overline{F_x} U_\infty}{\overline{P}} = \frac{\overline{C_T}}{\overline{C_p}} \quad (2.3)$$

Des valeurs négatives de rendement apparaissent alors lorsque le système produit de la traînée (au lieu d'une poussée) mais que le travail nécessaire n'est pas nul. De même, lorsque le profil oscillant se propulse lui-même, les efforts moyens de traînée F_D et de poussée F_T se compensent lorsque le régime établi est atteint (par la loi de Newton $ma_x = 0 = F_x = F_T + F_D$) [49]. L'efficacité ainsi définie devient donc nulle lors des simulations numériques qui ne permettent de calculer que la résultante totale des forces F_x sans distinguer les apports réels de la traînée et de la poussée ! Pour tenter de résoudre ce problème, Windte et Radespiel [39] considèrent la traînée statique du profil à l'angle d'attaque moyen du mouvement θ_{av} pour calculer le coefficient de poussée :

$$C_T = -C_x + C_{x,stat}(\theta_{av})$$

En ajoutant cette traînée minimale qu'un moteur (à hélice) devrait compenser, traînée et

poussée sont artificiellement découplées et l'efficacité ne tends plus vers zéro en régime établi. Cette technique reste toutefois une approximation de la réalité.

De plus, comme le note Barrett *et al.* [49], l'efficacité totale du système devrait aussi prendre en compte les différentes pertes lors d'un cycle global. Difficile à intégrer numériquement, il est possible d'évaluer ces pertes lors d'études expérimentales : pertes dans le moteur, pertes dans la transmission jusqu'au profil mais aussi pertes d'énergie dans le corps d'un animal (efficacité aérobique [12]). Enfin, Kaya et Tuncer [36] notent que la masse, et donc l'inertie du profil, n'est pas prise en compte dans cette définition, notamment lors de l'évaluation de la puissance nécessaire au mouvement.

Enfin, aucune étude ne définit clairement un rendement de sustentation par *hovering*. Les études portant sur l'optimisation du processus [63, 71] cherchent plutôt à minimiser la puissance nécessaire \bar{P} pour soulever un certain poids mg . Pesavento et Wang [71] définissent alors une quantité adimensionnelle P^* qui peut être utilisée pour quantifier l'efficacité de *hovering* :

$$P^* = \frac{\bar{P}}{2\pi h_0 mg}$$

Le tableau 2.2 suivant résume les différentes définitions des rendements que l'on peut trouver dans la littérature selon les applications.

B. Principaux phénomènes physiques

Comme on l'a vu, les premiers phénomènes physiques instationnaires étudiés étaient néfastes car non-maîtrisés. Aujourd'hui, on se sert de ces effets instationnaires pour atteindre certains buts : extraction de puissance, propulsion et *hovering*.

L'effet Knoller-Betz [16] : Dans les années 1910, Knoller et Betz furent les premiers à observer que le battement d'une aile crée un angle d'attaque efficace et donc une force aérodynamique, N , qui se divise en une composante verticale (la portance si elle est positive) et une composante horizontale (poussée/trainée). L'effet Knoller-Betz est donc le premier effet instationnaire mis en évidence.

Les lâchers tourbillonnaires (*vortex shedding*) : Le modèle de Knoller-Betz omet toutefois la présence de lâchers tourbillonnaires au bord de fuite des profils oscillants. McCroskey [8] note en effet que chaque changement de la circulation (et donc des forces aérodynamiques) autour du profil se traduit par un lâcher tourbillonnaire. Il conclue que

Applications	$A_{entrée}$	A_{sortie}	Rendement
Extraction de puissance	Puissance disponible dans le fluide $P_a = \frac{1}{2}\rho U_\infty^3 d$	Puissance extraite \bar{P}	Efficacité totale [31] $\eta_e = \bar{C}_P \frac{c}{d}$
	Puissance “idéale” de Betz $P_{id} = \eta_{betz} P_a$	Puissance extraite \bar{P}	Efficacité idéale [9] $\eta_{e_{id}} = \frac{\eta_e}{\eta_{betz}}$
Propulsion	Puissance nécessaire \bar{P}	Puissance de poussée $\bar{F}_x U_\infty$	Efficacité $\eta_p = \frac{\bar{C}_T}{\bar{C}_P}$
<i>Hovering</i>	Puissance nécessaire \bar{P}	Poids mg	Quantité adim. [71] $\frac{1}{P^*} = \frac{2\pi h_0 mg}{\bar{P}}$

Tableau 2.2 Différentes définitions du rendement selon les applications.

la dépendance au temps du sillage est un aspect distinctif des profils oscillants. Il se crée ainsi naturellement des allées de tourbillons de von Karman à l’arrière d’un corps au repos ou à l’arrière d’un profil oscillant subissant des variations d’angle d’attaque. Une interaction profil-vortex apparaît alors avec un impact d’une grande importance, notamment dans la création de portance [16]. C’est en fait un échange d’énergie bénéfique (des insectes récupèrent cette énergie pour se propulser) ou destructeur (résonance non-maîtrisée). Ainsi, la compréhension de ces phénomènes d’interaction profil-vortex est primordiale mais d’une grande complexité à simuler. Young et Lai [26] ont montré que l’interaction entre les lâchers naturels du profil et son mouvement oscillatoire produisent des lâchers de paires de vortex au bord de fuite [72]. Ils ont aussi mis en évidence une région de lock-in dans le plan $k - h_0$ où cette interaction peut se produire. Le comportement de l’écoulement séparé proche du bord de fuite devient alors crucial et ne peut être prédit que grâce à une approche visqueuse. Toutefois, c’est la compréhension du lâcher tourbillonnaire au bord d’attaque, LEVS (Leading Edge Vortex Shedding), et de ses effets qui font l’objet de toutes les attentions en ce moment [31, 73, 74, 21, 70] et qui font le plus polémique [21]. En effet, depuis sa découverte par Ellington *et al.* [75], certains y voient une source importante de portance lorsqu’il reste attaché au profil. Ainsi, pour Platzer et Jones [16] ainsi que pour Pesavento et Wang [71] le LEVS joue un rôle crucial dans la création importante de portance nécessaire au vol stationnaire (*hovering*) des insectes et petits oiseaux. Mais d’autres sont plus sceptiques. Il semble en tout cas que pour l’extraction de puissance, le LEVS joue un rôle essentiel de synchronisation entre les forces aérodynamiques et les mouvements du profil pour obtenir de forts rendements [31].

La signature de sillage [31, 76] : Il est intéressant d’observer la signature du sillage car elle permet de faire la distinction entre une configuration d’extraction de puissance et de propulsion. Ainsi, un sillage avec une allée du type von Karman est synonyme de création de traînée, de perte de vitesse horizontale et va caractériser l’extraction de puissance. Au contraire, le phénomène de propulsion va se traduire par une augmentation de la vitesse horizontale et la création d’une allée de von Karman inversée [16] : les vortex du haut vont dans le sens inverse des aiguilles d’une montre alors que ceux du bas vont dans le sens des aiguilles d’une montre. Sur la ligne de séparation de ces deux rangées de vortex, on a donc une sorte de “jet” qui se crée comme entre deux rouleaux de laveuse automatique de voiture. Ceci induit de la poussée sur le profil. Ainsi, les tourbillons générés par un régime de propulsion vont s’éloigner plus vite du profil et que ceux générés dans le cas de l’extraction de puissance.

Le décrochage dynamique : Lorsqu'on impose à un profil de rapides changements d'angles d'attaque avec de fortes amplitudes, il peut se produire une séparation de l'écoulement. On parle alors de décrochage dynamique (*dynamic stall*) [8]. Ce phénomène visqueux n'est pas propre aux profils oscillants (hélicoptères, turbines, etc.) mais est très important lorsqu'on en fait l'étude. En effet, si l'angle d'attaque instationnaire est de l'ordre de celui du décrochage statique, un phénomène important d'hystérésis se développe pour les forces et les moments par rapport à l'angle d'attaque. Les valeurs maximales des coefficients de portance, de traînée et de moment peuvent alors dépassées largement leur valeurs statiques. Ce phénomène est donc crucial dans la génération de grandes quantités de puissance [27, 77]. Visuellement, c'est un phénomène de séparation massive, typiquement visqueux, qui induit le développement au bord d'attaque puis la convection d'un grand tourbillon du au décrochage dynamique (*Dynamic Stall Vortex, DSV*). Pour plus d'information à ce sujet, on invite le lecteur à se référer aux articles de Tuncer *et al.* [77] ou de Sarkar et Venkatraman [78] et au livre de Cebeci [76].

2.1.3 Simulations et résultats

En parallèle de la compréhension qualitative des phénomènes physiques caractérisant les profils oscillants, les tentatives de modélisation quantitatives se sont développées grâce aux mesures expérimentales et aux simulations numériques. Comme on l'a vu précédemment, peu d'auteurs se servent des profils oscillants pour l'extraction de puissance [9, 30, 27, 31, 25, 68] mais leur potentiel en régime de propulsion est de plus en plus étudié. On donne en premier lieu un bref aperçu des études expérimentales menées sur les profils oscillants, souvent associées à la propulsion animale. On présente ensuite les différentes méthodes de simulation numérique utilisées pour modéliser les profils oscillants que ce soit en régime d'extraction de puissance ou de production de poussée. Enfin, on souligne les principaux résultats obtenus avec des profils oscillants en termes de rendement d'extraction de puissance, d'efficacité de propulsion et de production de poussée.

A. Biologie et études expérimentales

Les biologistes étudient depuis longtemps la propulsion animale, aquatique [48, 50, 12] ou aérienne [75, 79]. Leurs conclusions semblent toutes aller dans le même sens : chaque créature utilise le mode de propulsion le plus économique (le plus efficace) selon la manière de vivre qu'ils ont développée via la sélection naturelle [48, 11]. La nature a donc déjà optimisé des modes de propulsion dont les chercheurs vont s'inspirer pour améliorer l'efficacité des systèmes mécaniques. L'analyse dimensionnelle joue un rôle important dans

ces études zoologiques puisqu'elle permette une classification des espèces selon leurs "similarités" [50, 11] et permet de tirer des conclusions transposables à des espèces semblables. Ainsi, Taylor *et al.* [50] démontrent que les animaux nagent et volent principalement à l'intérieur d'un intervalle du nombre de Strouhal : $0.2 < St < 0.4$ permettant de grandes efficacités de propulsion (de 70% à 80%). Cette optimisation naturelle du nombre de Strouhal se retrouve dans les études expérimentales [33, 80] et numériques [33, 24] portant sur les profils oscillants. Enfin, les nombreux travaux sur le vol et la nage des animaux ont identifié les différents mécanismes instationnaires utilisés pour générer d'importantes forces de poussée ou de portance. Ainsi, l'importance du LEVS (*leading-edge vortex shedding*) dans la production de portance a été mise à jour par Ellington *et al.* [75] dès 1996 grâce à l'étude de l'écoulement autour de l'aile d'un papillon *Manduca sexta*.

Les études expérimentales essaient de reproduire ces modes de propulsion animale grâce à des profils oscillants comme le soulignent Triantafyllou *et al.* [81] dans leur revue de littérature sur le sujet. Ces travaux visent essentiellement à comprendre les mécanismes de formation, de lâcher et d'interaction des tourbillons produits par des profils oscillants [33, 72, 82], notamment au bord d'attaque pour mieux comprendre le développement du LEVS [74]. Dans cette optique, la plupart des études (voir tableau 2.3) utilise une géométrie NACA0012 en battement et/ou en rotation afin de décrire des mouvements proches de ceux observés dans la nature. Exceptés Sahoo et Bowersox [74] qui étudient l'écoulement du fluide autour du bord d'attaque d'un profil oscillant à haut Reynolds (hélicoptère), les autres auteurs se concentrent sur des régimes d'écoulement à bas Reynolds ($< 40\,000$) correspondant à ceux rencontrés en biologie et pour la conception de MAV. Dans le domaine de la propulsion [33, 80, 34], des efficacités supérieures à 70% sont obtenues (les rendements diminuent lorsqu'on abaisse le nombre de Reynolds car la viscosité s'accroît). L'interaction entre la vorticité du bord d'attaque et celle du bord de fuite apparaît comme un mécanisme fondamental dans l'atteinte de hautes efficacités. Le déphasage entre le mouvement de battement et celui de rotation semble être le paramètre contrôlant ce mécanisme. Toutefois, les auteurs constatent que le mouvement optimal pour le rendement n'est pas le même que pour la production de poussée. Les mécanismes générant de grandes performances de propulsion ont encore leur part de mystère. L'introduction d'une flexibilité selon la corde ou l'envergure du profil semble également avoir des effets bénéfiques sur les rendements de propulsion [81, 14, 83, 84, 38, 85] même si la production de poussée est alors affectée (pour plus de détails voir section 2.2).

Finalement, soulignons l'existence d'une étude expérimentale sur l'extraction de

puissance par des profils oscillants menée par Simpson *et al.* [86]. Celle-ci est d'ailleurs également inspirée par des études biologiques montrant la capacité de certains poissons à récupérer l'énergie des vagues pour se propulser. Les auteurs obtiennent une efficacité maximale d'extraction de puissance intéressante de 43% (limite de Betz : 57%) avec un profil NACA0012 oscillant. Toutefois, cette efficacité décroît rapidement lorsque l'allongement du profil diminue.

Auteur, Année	Applications	Profil	Mvt	Reynolds	η_{max}
Anderson[33] 1998	Propulsion	NACA0012	B+R	40 000 et 1100	87%
Lai[72] 1999	Oscill.	NACA0012	B	500 à 21 000	-
Read[80] 2003	Propulsion	NACA0012	B+R	40 000	71.5%
Schouveiler[34] 2005	Propulsion	NACA0012	B+R	40 000	73%
Heathcote[83, 84] 2007	Propulsion flexibilité-C	Goutte + plaque flexible	B	9 000 à 27 000	-
Sahoo[74] 2008	Oscill.	NACA0012	B	2 000 000	-
McGowan[87] 2008	Validation de code	SD7003	B+R	40 000	-
Heathcote[38] 2008	Propulsion flexibilité-E	NACA0012	B	10 000 à 30 000	-
Simpson[86] 2008	Extraction de puissance	NACA0012	B+R	13 800	43%
Jardin[46] 2009	<i>Hover</i>	NACA0012	asym	-	-
Ansari[82] 2009	Oscill.	Plaque plane	R	500 et 15 000	-
Mazaheri[85] 2010	<i>Hover</i> flexibilité-C	Membrane	B	-	-

Tableau 2.3 Principales études expérimentales : application à la propulsion, au vol stationnaire (*hover*), à l'extraction de puissance ou à l'étude précise de l'écoulement autour d'un profil oscillant (oscill.), flexibilité selon la corde (C) ou l'envergure (E), mouvements (Mvt) de rotation (R) et de battement (B) ou asymétrique (asym) pour le vol stationnaire.

B. Simulation numérique

Les chercheurs se sont tournés vers la simulation numérique des profils oscillants afin d’explorer plus en détails les phénomènes physiques mis en jeu (voir tableau 2.4) et les performances des profils oscillants tant pour l’extraction de puissance (voir tableau 2.5) que pour la propulsion (voir tableau 2.6). Toutefois, le problème est complexe à modéliser car il met en jeux des mécanismes fortement instationnaires avec des séparations de l’écoulement, des lâchers tourbillonnaires ainsi que de fortes interactions entre la vorticité produite au bord d’attaque et celle produite au bord de fuite. Des simplifications ont donc du être faites lors des premières simulations à cause de la puissance limitée des ordinateurs. Puis, les modèles ont été complexifiés avec l’accroissement des capacités de calculs pour rapprocher les simulations de la réalité. Pour présenter les méthodes numériques utilisées dans la simulation de profils oscillants, on va ainsi distinguer trois approches explorées historiquement dans un ordre croissant de complexité : les théories linéarisées, les approches simplifiées non-visqueuses et les équations visqueuses de Navier-Stokes.

Théories linéarisées : A la suite de la découverte de l’effet Knoller-Betz, les premières études théoriques sur l’aérodynamique des profils oscillants furent menées en s’appuyant sur des théories linéarisées, par exemple celle de Garrick en 1936 [95] basée sur les travaux de plaque plane de Theodorsen [96]. La linéarisation se fait grâce à l’hypothèse des petites perturbations ce qui limite les analyses. En outre, ces théories ne tiennent pas compte de l’évolution instationnaire du sillage cr  e par les lâchers tourbillonnaires. Ainsi, dans les travaux précurseurs de McKinney et DeLaurier [9] sur l’extraction de puissance par des profils oscillants, on trouve une étude analytique du problème comparée avec une étude expérimentale. Les auteurs attribuent la différence raisonnable (20% d’erreur) entre les deux approches aux effets de décrochages dynamiques qui ne sont pas modélisés. L’approche linéarisée permet donc d’avoir une première modélisation qualitative.    partir des travaux de Theodorsen [96], on a tenté de modéliser les phénomènes non-linéaires qui caractérisent les profils instationnaires et prennent en compte les propriétés réels du phénomène (  paisseur, cambrure, grandes amplitudes, ...), comme le note McCroskey [8]. Ainsi, les travaux de Ansari *et al* [97, 98] améliorent la théorie de Theodorsen en y incluant les LEVS dans le cadre d’analyse aéroélastique.

Théories simplifiées : L’approche quasi-statique est une manière d’approximer les phénomènes instationnaires qui fut utilisée pour modéliser les forces aérodynamiques générées par des ailes battantes d’oiseaux et d’insectes [99] et ainsi mieux comprendre leur physique. Toutefois, ces modèles négligent les effets “d’histoire” caractéristiques des problèmes ins-

Auteur, Année	Équations fluides	Méthode de résolution
Katz[88] 1981	2D potentielles	DVM (+séparation)
Streitlien[89] 1998	2D linéaires	analytique
Wang[24] 2000	2D N-S	Différences Finies
Ramamurti[73] 2001	2D N-S	Éléments Finis
Zhu[53] 2002	3D potentielles	Méthode des panneaux
Young[26] 2004	2D RANS 2D potentielles	- Méthode des panneaux
Blondeaux[90] 2005	3D N-S	Différences Finies
Platzer[91] 2006	2D potentielles	Méthode des panneaux
Isaac[92] 2008	2D N-S	Logiciel FLUENT
McGowan[87] 2008	3D RANS	Logiciel CFL3D
Sarkar[78] 2008	2D potentielles	DVM (+séparation)
Visbal[93] 2009	3D N-S	Logiciel FDL3DI Différences finies
Sudhakar[94] 2010	2D N-S	Méthode de frontière immergée

Tableau 2.4 Principales études numériques pour les profils oscillants : équations fluides et méthodes de résolution.

tationnaires et sous-estiment ainsi les forces générées par les ailes en battement [21, 100]. Ainsi, Kinsey *et al.* [31] concluent que même pour des cas simples, loin du décrochage dynamique, cette méthode ne permet pas de résoudre le problème de manière adéquate. Une autre approximation consiste à négliger les effets visqueux. En effet, grâce à la puissance des ordinateurs modernes, on lève la limitation des petites perturbations et on fait une seule hypothèse : l'écoulement est potentiel (non-visqueux et irrotationnel). On a alors une approximation raisonnable du développement instationnaire du sillage durant le cycle d'oscillation du profil grâce à la modélisation d'un lâcher tourbillonnaire au bord de fuite. En pratique, on utilise les méthodes de panneaux instationnaires (*unsteady panel methods*) [26, 30, 27, 76, 68] et les méthodes des vortex discrets, DVM (*Discrete Vortex Methods*) [88]. La validation de ces méthodes montre un bon accord qualitatif avec les résultats expérimentaux [26, 53]. Toutefois, l'omission des effets visqueux et de la séparation de l'écoulement induisent un taux d'erreur important (autour de 20%) [27, 33]. Pour corriger ce problème, certains auteurs ont essayé d'inclure dans ces méthodes quelques éléments de viscosité (en plus du lâcher au bord de fuite). Ainsi, certains se servent de données expérimentales pour fixer un point de séparation de l'écoulement sur des profils cambrés [88, 53] ou améliorer la modélisation de l'évolution du tourbillon de bord de fuite dans le sillage [53, 65, 101]. L'importance du LEVS sur les performances d'un profil oscillant a poussé d'autres auteurs à tenter de le modéliser dans ces méthodes potentielles, avec un certain succès [64]. Toutefois, malgré les améliorations apportées aux méthodes potentielles notamment afin de modéliser la séparation de l'écoulement, les approches non-visqueuses sont limitées au problème sans décrochage dynamique [31]. Or, ceci est problématique, car ce phénomène joue un rôle clé dans les performances des profils oscillants. Il faut donc utiliser les équations générales de Navier-Stokes afin de modéliser correctement le problème des profils oscillants dans le cadre d'un processus d'optimisation.

Équations de Navier-Stokes : Depuis les 20 dernières années, il est possible de laisser tomber l'hypothèse non-visqueuse et de faire tourner des codes de CFD (*Computational Fluid Dynamics*) basés sur les équations de Navier-Stokes. C'est cette approche que l'on va choisir dans notre étude. C'est en effet la seule qui permet une modélisation assez précise des phénomènes instationnaires dus à un profil oscillant pour une bonne compréhension physique de tous les phénomènes mis en jeu. Dans le cadre de l'extraction de puissance, seule l'équipe du Pr. Dumas de l'Université Laval [102, 25, 4] utilise une approche complètement visqueuse avec les équations de Navier-Stokes grâce au logiciel commercial FLUENT. Malgré des études très détaillées, les résultats ne sont pas comparés avec des études précédentes sur l'extraction de puissance, soit numériques, soit expérimentales. Les simulations ne sont donc pas validées (sauf sur un cylindre) et on ne voit pas concrètement l'avantage qu'apporte l'utilisation des

équations de Navier-Stokes par rapport aux méthodes potentielles. Toutefois, l'utilisation de codes Navier-Stokes pour étudier l'efficacité de propulsion de profils oscillants est plus répandue [77, 24, 26, 23, 87, 54, 35, 103, 57, 104, 58, 42, 41, 105]. Les études de Young [26, 23] sont particulièrement intéressantes puisqu'elles comparent des données expérimentales avec différents codes basés sur : les formules analytiques de Garrick/Theodorsen [96, 95], la théorie potentielle avec différents types de sillages, les équations Navier-Stokes laminares et les équations de Navier-Stokes turbulentes. L'auteur peut ainsi valider ses codes, comparer les différentes approches et isoler les effets des différents phénomènes physiques présents. Le premier effet qui n'est pas pris en compte par les méthodes potentielles classiques est le lâcher tourbillonnaire au bord d'attaque (LEVS) qui a une influence particulièrement importante pour de faibles fréquences d'oscillation [33]. Ainsi, alors que les résultats des méthodes potentielles montrent que les forces dépendent essentiellement du nombre de Strouhal St , les simulations Navier-Stokes soulignent aussi une influence non négligeable d'un autre paramètre indépendant : la fréquence réduite k . L'apparition de ce deuxième paramètre est directement due au LEVS. La deuxième conclusion est que seul un code Navier-Stokes peut reproduire les structures complexes du sillage car le phénomène de lâchers tourbillonnaires multiples (par cycle) est typiquement visqueux. Ainsi, seule une analyse avec les équations de Navier-Stokes permet de voir que la production de poussée via des allées de Karman renversées apparaît grâce aux lâchers de paires de vortex au bord de fuite.

Auteur, Année	Équations fluides	Méthode de résolution
McKinney[9] 1981	Équations linéarisées	Analytique
Lindsey[30] 2002	2D potentielles 2D RANS	Méthode des panneaux Différences finies
Jones[27] 2003	2D potentielles	Méthode des panneaux
Kinsey[31] 2006	2D N-S	Éléments finis
Julien[25] 2007	2D RANS	Éléments Finis
Zhu[68] 2009	3D potentielles	Méthode des panneaux

Tableau 2.5 Principales études numériques pour l'extraction de puissance : équations fluides et méthodes de résolution.

Auteur, Année	Équations fluides	Méthode de résolution
Garrick[95] 1936	Theodorsen[96]	Analytique
Jones[28] 1997	2D potentielles	Méthode des panneaux
Anderson [33] 1998	2D linéaires + lâchers de vortex	Algorithme spécifique
Zhu[53] 2002	3D potentielles	Méthode des panneaux
Guglielmini[70] 2004	Équations de vortacité	Méthode spectrale et différences finies
Sarkar[106] 2006	2D visqueuses	DVM
Kaya[54, 36] 2007	2D RANS	Maillage chimère
Soueid[107] 2008	2D N-S	Méthode spectrale
Guerrero[42] 2009	2D N-S	Différences finies
Gopalakrishnan[41] 2009	3D N-S, LES	Volumes finis
von Loebbecke[108, 12] 2009	3D N-S	Différences finies
Xiao[105] 2010	2D N-S	Volumes finis

Tableau 2.6 Principales études numériques pour la propulsion : équations fluides et méthodes de résolution.

En conclusion, le régime d'utilisation à bas Reynolds des profils oscillants, que ce soit dans le cadre de l'extraction de puissance ou de la propulsion, provoque une séparation de l'écoulement au bord d'attaque, notamment pour des angles d'attaques importants. Les méthodes potentielles sont incapables de prédire de tels effets de séparation et de lâchers tourbillonnaires. Il est donc nécessaire d'utiliser les équations de Navier-Stokes pour modéliser l'écoulement fluide dans notre étude afin de prendre un compte tous les paramètres régissant la physique des profils oscillants.

C. Résultats

Finalement grâce à l'étude des paramètres influents sur les performances d'un profil oscillants, les différents auteurs ont pu obtenir des performances intéressantes en termes d'efficacité d'extraction de puissance ou de propulsion, soit grâce à de nombreuses simulations soit grâce à des optimisations plus ou moins automatiques.

Rendements pour l'extraction de puissance : Concernant l'extraction de puissance, on a regroupé ces résultats dans le tableau 2.7, même si les données sont parfois lacunaires. Ainsi, dès 1981, les travaux précurseurs expérimentaux de McKinney et DeLaurier [9] avec un profil rigide oscillant donnaient des rendements maximaux de l'ordre de 17%. Grâce à une optimisation "à la main", Davids [29] obtint une efficacité d'environ 30% avec un code potentiel. Enfin, Kinsey et Dumas [31] grâce à une étude numérique Navier-Stokes très complète des différents paramètres trouvent des rendements dépassant les 34%.

Toutefois, ces fortes efficacités n'ont pas encore été reproduites expérimentalement. En outre, il est intéressant de noter que contrairement à ce que disent Jones et Platzler [28], l'optimum de l'extraction de puissance n'est pas atteint en même temps que l'efficacité op-

Auteur,date	NACA	Re	$k = \frac{\omega c}{U_\infty}$	θ_0 (°)	h_0/c	x_p/c	ϕ	η_{eT}
McKinney[9] 1981	0012	2.10^6	?	30	0.30	0.50	90°	16.8%
Davids[29] 1999	0012	-	1.975	?	0.625	0.55	94°	30.0%
Lindsey[30] 2002	0014	10^6	1.0	?	2.0	0.25	90°	33.4%
	0014	2.10^4	1.0	?	1.3	0.25	90°	17.2%
Kinsey[31] 2006	0015	1100	0.880	76.33	1.0	0.33	90°	33.6%

Tableau 2.7 Rendements optimaux pour l'extraction de puissance.

timale [30, 4]. Il faut donc bien faire un compromis entre puissance et efficacité, et ainsi pondérer les critères d’optimisation des performances d’un profil oscillant.

Rendements pour la propulsion : Les études s’intéressant à la propulsion produite par des profils oscillants sont de plus en plus nombreuses. Toutefois, peu d’entre elles cherchent à optimiser les rendements de propulsion. Seuls Kaya et Tuncer [54, 36] et Soueid *et al.* [107] ont développé des algorithmes d’optimisation du mouvement du profil afin d’obtenir de meilleures performances en termes de poussée, de portance ou d’efficacité de propulsion. Présentés dans le tableau 2.8, les résultats de Tuncer et Kaya [54] et de Soueid *et al.* [107] s’approchent des efficacités élevées obtenues expérimentalement (voir tableau 2.3). On note également que les mouvements optimisant la poussée ($C_T = 1.45$ et $C_T = 2.0$) réduisent les efficacités de propulsion. A nouveau, un compromis doit donc être fait entre poussée et efficacité. Dans une étude plus récente [36], ces mêmes auteurs améliorent la production de poussée avec un mouvement oscillant non-sinusoidal. Toutefois, ils concluent également que le mouvement sinusoidal permet d’obtenir les meilleurs rendements de propulsion.

À cause d’adimensionnalisations différentes et de données manquantes, il est difficile de comparer un certain nombre d’études. Toutefois, on peut établir certaines conditions menant à des performances élevées. Tout d’abord, la production de poussée ainsi que l’efficacité augmentent en général avec le nombre de Reynolds [40]. Ensuite, comme on peut l’observer avec les résultats présentés dans le tableau 2.8, l’introduction d’une rotation en plus du battement permet une nette amélioration des performances. Dans ce cas, un axe de rotation situé au tiers de la corde semble donner les meilleurs résultats [33, 70, 107]. Concernant la valeur de l’angle déphasage Φ entre les deux mouvements, de nombreux auteurs utilisent $\Phi = 90^\circ$ [89, 70] alors que d’autres suggèrent des valeurs plus élevées autour de 107° [28]. Les résultats d’optimisation semblent convergés entre 85° et 95° . Enfin, l’utilisation de plusieurs profils semble avoir des effets bénéfiques sur les performances de propulsion comme le soulignent Platzer et Jones [91] dans leur revue de littérature. Utilisés en biplan, l’un au-dessus de l’autre, les profils oscillants produisent de 20 à 40% plus de poussée qu’un profil seul. Encore mieux, dans une configuration en tandem, avec un profil fixe à l’arrière d’un profil oscillant, l’efficacité propulsive se rapproche de 100%. En effet, l’énergie transportée par les vortex créés par le premier profil est convertie en poussée par le deuxième profil comme le ferai un oiseau avec sa queue [67, 32] ou un poisson avec sa nageoire caudale [53].

Auteur, date	NACA	Re	$k = \frac{\omega c}{U_\infty}$	θ_0	h_0/c	x_p/c	ϕ	C_T	η_p
Guglielmini 2004[70]	0012	1100	0.37	35.0°	3.00	1/3	90.0°	0.517	46.0%
Tuncer 2005[54]	0012	10 ⁴	1.00	35.6°	0.83	1/2	86.5°	0.18	67.5%
	0012	10 ⁴	1.00	28.6°	1.55	1/2	94.9°	1.45	35.9%
Soueid 2008[107]	0012	1100	?	32.1°	2.820	1/3	85.4°	0.512	50.2%
	0012	1100	?	33.4°	4.512	1/3	89.7°	2.000	38.1%
Ashraf 2009[40]	0012	2.10 ⁴	2.0	0	0.25	-	-	0.112	25.1%
	0015	2.10 ⁴	2.0	0	0.25	-	-	0.122	29.8%
Guerrero 2009[42]	2412	1100	4.20	0	0.3	-	-	0.849	15.9%

Tableau 2.8 Performances optimales pour la propulsion.

2.2 Interaction fluide-structure en grands déplacements

Comme on vient de le voir, un profil rigide oscillant dans un écoulement peut extraire de l'énergie du fluide ou lui en donner, produisant ainsi une poussée. En effet, les forces aérodynamiques produites par le battement des ailes (non-fixes) agissent sur l'écoulement du fluide environnant, on parle alors d'*interaction fluide-structure* (IFS) ou plus précisément d'*aéroélasticité*. A l'inverse le fluide ainsi perturbé va agir sur la structure des ailes dont les déformations et les déplacements seront d'autant plus forts que sa flexibilité sera grande. Les petites dimensions des micro-drones ainsi que leur faible poids contribuent à accroître fortement la flexibilité des ailes tout comme celles des oiseaux, les palmes d'un plongeur ou les nageoires des poissons. On fait alors face à un phénomène complexe de *couplage fort* qui modifie les performances de l'aile déformée, bien différentes de celles du profil non-déformé. D'ailleurs, l'utilisation de structures flexibles semblent améliorer l'efficacité de propulsion de près de 38% [14] lors d'études expérimentales. Les travaux expérimentaux d'Heathcote et Gursul [84, 83] confirment que les profils oscillants flexibles permettent d'obtenir de meilleures performances que les profils rigides, notamment en termes d'efficacité.

Une meilleure compréhension de ces processus d'extraction de puissance et de propulsion par des structures flexibles oscillantes passe donc par la simulation de problèmes d'interaction fluide-structure. Toutefois, les comportements non-linéaires des écoulements incompressibles de fluides visqueux et des solides en grands déplacements ainsi que la déformation des interfaces induisent de nombreuses difficultés à surmonter. Ainsi, en régime stationnaire, ces phénomènes d'IFS sont étudiés depuis quelques années déjà mais restent d'une grande

complexité et requièrent d’importantes ressources informatiques comme on a pu le constater lors de nos travaux de maîtrise [109]. En régime instationnaire, les temps de calculs sont démultipliés de sorte que ces phénomènes sont extrêmement complexes à modéliser et leur compréhension reste encore délicate. Même si on assiste actuellement à la naissance d’une littérature grandissante portant sur les profils oscillants dans le cadre de la propulsion des MAVs, des insectes, des oiseaux ou encore des mammifères marins [7, 15], Shyy *et al.* [18] soulignent qu’il reste encore de nombreuses questions ouvertes dans une récente revue des connaissances sur le sujet. Il y a notamment un intérêt certain à utiliser des profils flexibles mais d’importantes recherches doivent encore être menées afin de mieux comprendre le comportement aérodynamique des profils flexibles en grands déplacements : “There is a desirable level of structural flexibility to support desirable aerodynamics. Significant work needs to be done to better understand the interaction between structural flexibility and aerodynamic performance under unpredictable wind gust conditions.” Du côté de l’extraction de puissance, ce n’est guère mieux puisque nos travaux présentés en 2007 [6] semblent être les seuls existants. De plus, les études menées jusqu’ici sur les performances propulsives d’une structure oscillante considèrent rarement, pour ne pas dire jamais, le mouvement du profil induit par la poussée. Ainsi, le problème d’IFS est en partie découplé puisque les effets des forces fluides sur le profil ne sont pas pris en compte, *i.e.* la poussée produite ne fait pas avancer le profil. On peut alors se demander si les rendements de propulsion ainsi calculés sont pertinents ?

Afin d’améliorer la simulation des problèmes d’interaction fluide-structure, on propose un tour d’horizon des techniques utilisées pour traiter les 3 parties constituant le système : l’écoulement fluide, la structure et le couplage. Tout d’abord, on regarde comment gérer adéquatement la déformation du domaine fluide due aux déplacements du solide. Ensuite, on étudie les différentes manières de modéliser la structure, des déformations imposées jusqu’aux grands déplacements libres. Enfin, on souligne l’importance du couplage numérique entre le fluide et la structure afin de préserver l’équilibre à l’interface.

2.2.1 Déformation du domaine fluide

Quelque soit la “force” du couplage et le type de structure, les déplacements du solide vont induire une déformation du domaine fluide au cours du temps. Dans une approche éléments finis, on doit alors gérer cette déformation induisant un déplacement des points de calcul, *i.e.* le maillage. De plus, il faut choisir une écriture adaptée des équations sur le domaine fluide ainsi déformé. Mais alors, quelles propriétés doivent être respectées lors de la transformation du maillage pour que le problème reste correctement posé ? On tentera de répondre à cette

question dans la troisième partie en introduisant la notion de *loi de conservation géométrique* ou GCL (*geometric conservation law*).

A. Déformation du maillage

Dans le cadre des maillages non-structurés, on trouve dans la littérature plusieurs techniques permettant de gérer à la fois les déplacements des frontières et les déformations du domaine fluide. On peut les classer en trois catégories. Tout d’abord, il est possible de remailler entièrement le domaine fluide une fois le déplacement du solide connu et d’itérer jusqu’à la convergence [110]. Cette approche permet de gérer n’importe quelle déformation du domaine fluide mais à un coût de calcul élevé, notamment pour des problèmes instationnaires. La seconde option, très répandue, est d’utiliser l’analogie avec un ressort (*spring analogy*) pour déplacer les points du maillage selon la déformation des frontières [111, 112, 113, 114]. Enfin, on peut gérer la déformation du domaine fluide en introduisant des simili-équations structurelles grâce à différentes approches *pseudo-solides* [115, 116, 117, 118, 119, 120].

Parmi ces approches, on choisit d’étudier celle présentée par Sackinger *et al.* [121]. Elle est formulée au niveau continu ce qui permet un couplage complet de toutes les variables fluides et pseudo-solides. Bien que moins bien adaptée aux très grandes déformations que la technique de remaillage, l’approche pseudo-solide est aussi bien moins coûteuse (équations linéaires). De plus, on peut facilement l’améliorer de plusieurs façons : en adaptant les propriétés élastiques du pseudo-solide pour éviter le repliement du maillage, en associant une formulation de *lagrangien actualisé* [122] qui utilise le maillage déformé au temps précédent pour générer le nouveau maillage sur la configuration déformée ou encore en introduisant un zonage du domaine. Par exemple, pour un profil oscillant avec de grandes amplitudes de rotation, il devient nécessaire de découper le domaine en 2 zones [31] dont l’une subit un mouvement de corps rigide associé au profil. Traitant les équations au niveau continu, l’approche pseudo-solide rend alors implicite la gestion des interfaces entre les zones fluides (aucun glissement). Enfin, cette approche générale est compatible avec les procédures utilisées pour l’estimation d’erreur et l’adaptation de maillage [123].

B. Approche ALE

Dans le contexte de la méthode des éléments finis, deux approches sont communément utilisées pour résoudre des problèmes d’écoulements fluides instationnaires avec des frontières en mouvement. Tout d’abord, la méthode d’éléments finis espace-temps connaît un intérêt grandissant ces dernières années. Introduite par Hughes *et al.* en dynamique

des structures [124] puis en dynamique des fluides [125], cette méthode est désormais aussi utilisée avec succès pour étudier les problèmes d'interaction fluide-structure (voir tableau 2.13). Elle permet notamment une description plus naturelle du domaine fluide qui se déforme et respecte automatiquement la *loi de conservation géométrique* (GCL) introduite ci-après [126]. Toutefois, le nombre d'inconnues est multiplié à chaque pas de temps, par 2 par exemple dans le cas d'un schéma d'intégration en temps du second ordre.

La seconde approche, et la plus utilisée, est la formulation Eulerienne-Lagrangienne arbitraire (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*, ALE). Elle permet le couplage d'une approche *lagrangienne* pour la structure (repère non-déformé) et *eulérienne* pour l'écoulement (configuration déformée). Dans cette approche, les équations fluides instationnaires sont exprimées par rapport à une configuration de référence fixe [127]. Une transformation ALE associe, à chaque temps t , un point du domaine de calcul déformé $\Omega(t)$ à un point dans le domaine de référence $\Omega(0)$. Les propriétés de cette transformation ALE (ou *vitesse de maille*) et leurs incidences sur le schéma numérique sont d'une grande importance comme souligné par Etienne *et al.* [128]. En effet, même si Lacroix et Garon [129] ont montré que cette approche fonctionne très bien dans le cas d'une déformation unidirectionnelle du domaine fluide, et contrairement à l'approche espace-temps, la formulation ALE n'est plus intrinsèquement consistante dès que les déformations du domaine sont arbitraires.

Malgré cet inconvénient, l'approche ALE reste intéressante car elle engendre un nombre d'inconnues moindre par rapport à l'approche espace-temps. On opte ainsi pour cette formulation ALE pour simuler les interactions fluide-structure. Toutefois il faut rendre cette formulation consistante pour que le problème reste correctement posé et conserver les propriétés du schéma de résolution. La loi de conservation géométrique (GCL) semble être la clé pour obtenir une formulation ALE appropriée. Notons que l'approche ALE permet de traiter la structure dans sa configuration non-déformée, ce qui facilite grandement les calculs puisque la formulation du problème structurel reste naturellement consistante.

C. Loi de conservation géométrique

La loi de conservation géométrique ou GCL (*geometric conservation law*) a fait l'objet de nombreuses études qui ont engendré des conclusions contradictoires au sujet de sa définition et de son impact sur la consistance de la formulation ALE. Il est généralement admis que si une formulation ALE préserve un écoulement uniforme sur un domaine qui se déforme, alors ceci constitue une définition de la GCL, ou du moins un test de respect de la GCL [112, 126, 130]. On parle de version discrète de la GCL ou D-GCL (*Discrete Geometric*

Conservation Law). Toutefois, bien que cette définition semble nécessaire pour conserver la stabilité d’une approche ALE [131], elle semble encore insuffisante pour obtenir une formulation ALE totalement consistante, notamment lorsqu’on parle d’intégration en temps d’ordres élevés. Ainsi, Étienne *et al.* [128] proposent une définition généralisée de la GCL avec trois niveaux de conformité (tests) :

1. une formulation ALE satisfaisant la GCL doit produire la solution exacte d’un problème de fluide au repos (*no-flow test*) sur un maillage qui se déforme de façon arbitraire (voir [132]).
2. une formulation ALE satisfaisant la GCL doit produire la solution exacte d’un écoulement uniforme sur un maillage qui se déforme (*i.e.* respect de la D-GCL présentée par Farhat *et al.* [131]).
3. pour une formulation ALE conçue pour satisfaire la GCL, le schéma d’intégration en temps doit conserver le même ordre de convergence sur un maillage qui se déforme que sur un maillage fixe.

Pour satisfaire ces trois niveaux de conformité de la GCL, il est nécessaire d’adapter la conception de la formulation ALE en imposant d’importantes contraintes sur les algorithmes d’intégration en temps [126, 131]. On opte pour l’approche développée par Etienne *et al.* [128], évaluant séparément la **divergence de la vitesse de maille** d’un côté, pour satisfaire les niveaux 1 et 2, et d’un autre côté, la **vitesse de maille** elle-même pour maintenir la précision en temps. Ils ont prouvé l’efficacité de leur approche, vérifiant les trois niveaux de conformité de la GCL sur des problèmes d’écoulements fluides avec des maillages qui se déforment. Avec des ajustements mineurs, on appliquera cette approche aux problèmes d’interaction fluide-structure (voir détails à la section 3.4.3).

2.2.2 Modélisation de la structure

On a déjà souligné dans la première partie de cette revue de littérature que plusieurs approximations ont été mises en œuvre pour simplifier la modélisation d’un écoulement fluide instationnaire, les méthodes potentielles en sont un exemple. Ces approches simplifiées peuvent encore être utilisées dans le cadre d’interaction fluide-structure [133, 134]. Il en va de même pour la modélisation de la structure. Certes, son traitement sur la configuration non-déformée (approche ALE) facilite sa résolution par rapport à celle de l’écoulement soumise à la déformation du domaine de calcul. Néanmoins, la complexité du couplage entre la structure et le fluide a poussé les chercheurs à utiliser des simplifications pour modéliser la structure du profil. On peut distinguer trois principaux niveaux de modélisation du solide en 2D. Tout d’abord, la modélisation la plus simple consiste à simuler les IFS sans “structure”,

simplement en imposant des déplacements plus ou moins complexes aux frontières du domaine fluide. C’est ce type de modélisation avec des mouvements de corps rigides qui est le plus utilisé dans le domaine des profils oscillants comme on l’a vu à la section 2.1. Ensuite, la modélisation peut tenir compte de la dynamique propre du solide en lui associant une masse (et donc une inertie). Le profil subit alors des mouvements libres de corps rigide, on parle d’*aéroélasticité*. Enfin, on peut tenir compte des déformations structurelles dues à la flexibilité du profil en introduisant des équations d’état régissant ces grands déplacements.

A. Déplacements imposés

La modélisation la plus simple est de considérer des problèmes d’interactions fluide-structure sans “structure”. Autrement dit, ce sont les frontières du domaine fluide dont on impose les déplacements qui font office de modélisation pour le solide. Il n’y a donc aucune équation structurelle à résoudre, seul l’écoulement fluide soumis à des frontières en mouvement doit être résolu. On néglige toute rétroaction du fluide sur le solide, *i.e.* on est dans le domaine du *couplage faible*. Cette approche découplée semble être adéquate pour l’étude de certains objets volants de type insectes à hauts nombres de Reynolds (approche non-visqueuse) d’après Daniel et Combes [135]. En considérant un fluide non-visqueux et des petits déplacements, ils déduisent d’une étude analytique que les effets inertiels sont prépondérants sur les forces de pression exercées par l’écoulement sur le solide. Il ne serait donc pas nécessaire de modéliser le couplage fluide-structure en entier mais seulement le transfert des efforts du solide sur l’écoulement fluide.

Deux types de déplacements peuvent alors être imposés. Tout d’abord, un mouvement de corps rigide de l’ensemble du solide peut être imposé aux frontières du profil oscillant (voir les études et les résultats présentés à la section 2.1). Ensuite, on peut améliorer cette modélisation en imposant des mouvements locaux aux frontières du profil solide, mimant ainsi une certaine flexibilité, ou du moins des profils à formes évolutives. De cette manière certains auteurs ont pu confirmer en premier les avantages des profils flexibles observés de manière expérimentale [14, 84]. Ainsi, Miao et Ho [35] ont étudié l’effet de la “flexibilité” d’un profil en battement en lui imposant des déformations prédéterminées. Ils concluent tout d’abord qu’il existe une amplitude de déformation optimale pour l’efficacité de propulsion. Ensuite, ils définissent un angle de déphasage ϕ entre le battement et la déformation du profil. Ils trouvent alors une valeur optimale de $\phi = -\pi/2$, semblable à celle trouvée pour le déphasage optimal entre le battement et la rotation d’un profil rigide ! Avec ce déphasage, l’efficacité de propulsion passe de 17% pour un profil rigide à 30% pour un profil déformé

d’une amplitude optimale. Il semble que la déformation du profil aide le tourbillon à parcourir l’aile en douceur du bord d’attaque ou bord de fuite. Tay et Lim [136] utilisent le même procédé avec une déformation du profil plus complexe mais concluent que la “flexibilité” n’est pas nécessairement bénéfique et son effet dépend de la configuration oscillante et de la forme du profil. La configuration de battement pur (sans rotation) semble être à privilégier pour que la flexibilité améliore l’efficacité de propulsion et la quantité de poussée. De fortes efficacités sont alors obtenues entre 66% et 76%. Toutefois, à cause de la très forte nonlinéarité des problèmes d’interaction fluide-structure, il est risqué de faire un lien aussi direct entre flexibilité et déformations imposées du profil, sans considérer les réactions de l’écoulement sur la structure flexible. En outre, le calcul de l’efficacité est biaisé pour les mêmes raisons ou alors il faudrait prendre en compte l’énergie nécessaire à la déformation active de la structure.

Ces premières études montrent donc des améliorations au niveau des performances des profils se déformant (flexibles ou munis d’actionneurs) en termes d’efficacité de propulsion pour certaines configurations d’oscillations. L’introduction d’une flexibilité du profil devrait donc permettre d’améliorer ses performances mais doit encore être confirmée par de meilleures modélisations de l’interaction fluide-structure. En effet, l’importance des déformations élastiques n’est pas toujours négligeable. Ainsi, dans le cadre hydrodynamique (forte densité du fluide), Daniel et Combes [135] confirment qu’elles ne sont plus négligeables. On peut aussi se demander si on peut encore négliger les déformations élastiques à bas Reynolds (écoulement visqueux) ou avec des solides en grands déplacements.

B. Aéroélasticité

Une amélioration de la modélisation de la structure consiste à lui associer une masse (et donc une inertie) afin de tenir compte de sa dynamique. Les effets inertiels ainsi que les effets des forces fluides agissant sur le profil peuvent alors être pris en compte. Cette modélisation s’appuie généralement sur 2 degrés de liberté en 2D : l’amplitude de battement h et l’angle d’attaque α . Comme le montre la figure 2.3, la modélisation s’appuie sur le système d’équations couplées suivant :

$$\begin{bmatrix} m & S_\alpha^1 \\ S_\alpha^1 & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_h & S_\alpha^2 \\ S_\alpha^2 & C_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & S_\alpha^3 \\ S_\alpha^3 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}^y \\ M_{ext} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

où F_{ext}^y représente les efforts verticaux s’exerçant sur le profil, M_{ext} le moment autour de l’axe élastique, m la masse du solide, I_α son moment d’inertie, C_h et C_α ses amortissements en flexion et en torsion, K_h et K_α ses raideurs en flexion et en torsion et S_α^i les termes de

couplage.

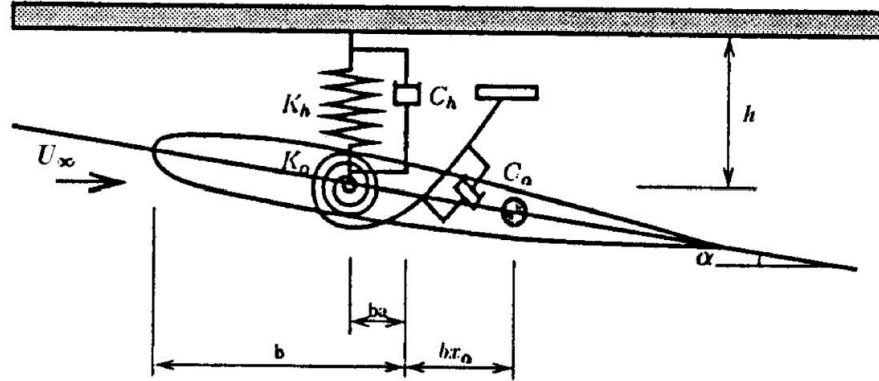


Figure 2.3 Modélisation d'une structure aéroélastique, tiré de [2]

Cette modélisation est surtout utilisée pour étudier le flottement et le décrochage dynamique des profils [137, 78, 2, 138] ou les phénomènes vibratoires induits par l'écoulement [139]. Dans le cadre des profils oscillants, cette modélisation permet d'introduire une dynamique libre du profil et ainsi un couplage total entre le fluide et la structure. La rétroaction des forces fluides va en effet avoir lieu grâce au système d'équations 2.4 et induire un mouvement du solide. Dans le domaine de la propulsion, Murray et Howle [69] étudient l'impact de l'ajout d'un degré de liberté sur l'amplitude de battement (voir Eq. 2.4 avec seulement K_h non-nul) lorsqu'on impose un mouvement de rotation du profil (sans masse) dans un écoulement non-visqueux. A l'inverse, Willis *et al.* cherchent à optimiser le mouvement de battement du profil pour améliorer l'efficacité de propulsion en libérant le degré de liberté en rotation α . Toomey et Eldredge [134] ont quant à eux utilisé cette modélisation aéroélastique pour faire un pas vers l'étude d'un profil flexible. Plus précisément, ils ont eu l'idée de couper le profil en deux demi-profils et d'insérer un degré de liberté en rotation (une charnière à ressort, *i.e.* une raideur en torsion) entre les deux parties. Le mouvement du profil amont est imposé alors que le profil aval subi une rotation sous l'effet des forces aérodynamiques, de pesanteur, d'inertie et de la réaction du ressort (voir Eq. 2.4). Utilisant une méthode de vortex prenant en compte la séparation de l'écoulement, ils concluent qu'une aile "flexible" requiert moins de puissance pour être mise en mouvement mais fournit aussi moins de portance. Toutefois, l'efficacité du système (rapport portance/puissance requise) est améliorée. Farnell *et al.* [140] présentent des résultats préliminaires qui vont encore plus loin en modélisant une structure flexible par N éléments rigides reliés par des charnières

en torsion (raideur+amortissement). L'imposition d'un terme d'avancée (*driving terms*) sur chaque élément permet l'avancement du solide, à l'image d'une anguille.

Enfin, il semble judicieux d'utiliser cette modélisation pour étudier de manière plus réaliste l'extraction de puissance et la propulsion des profils oscillants. En effet, les mouvements imposés du profil empêchent de quantifier les réels effets des efforts de l'écoulement sur le solide. Si on introduit des degrés de liberté sur l'amplitude ou la rotation du profil, on pourra alors étudier la force et donc l'énergie récupérable par le système du profil oscillant. Dans une récente étude, Peng et Zhu [141] étudient l'extraction de puissance par un profil oscillant de manière purement passive, *i.e.* déplacement du solide induit par les seules forces fluides. Le système est constitué d'un profil monté sur un ressort en torsion K_α et d'un amortisseur C_h représentant le générateur de puissance (masse et inertie sont négligées). Les équations 2.4 se réduisent alors à :

$$C_h \dot{h} = F_{ext}^y \quad (2.5)$$

$$K_\alpha \alpha = M_{ext} \quad (2.6)$$

En définissant l'énergie extraite par $P_{out} = c\dot{h}^2$, ils obtiennent des efficacités maximales de l'ordre de 20%. L'avantage de cette approche réside surtout dans sa simplicité de mise en œuvre et de contrôle puisque le mouvement n'est plus imposé (voir aussi les travaux similaires de Zhu *et al.* [68] avec des équations aéroélastiques légèrement différentes).

De même, dans le domaine de la propulsion, cette modélisation permet de simuler la libre avancée (ou montée) du profil due aux actions des forces de l'écoulement. On peut ainsi étudier réellement le processus de propulsion dont l'objectif est de faire avancer le système, soit selon l'axe horizontal (propulsion) soit selon l'axe vertical (sustentation). On a seulement trouvé quatre études utilisant cette modélisation pour simuler l'*autopropulsion* des poissons [55, 56, 142, 52]. Dans les quatre cas, les auteurs imposent une déformation ondulatoire aux frontières du "poisson" simulant une flexibilité (voir section 2.2.2) et observent la nage libre de ce dernier due aux forces hydrodynamiques. Shirgaonkar *et al.* [142] reformulent alors le nombre de Reynolds en fonction de la vitesse maximale U_{max} de déformation imposée alors que Yeo *et al.* [52] utilisent la fréquence f d'ondulation pour définir $Re_f = \rho f l_0^2 / \mu$. Ces derniers adaptent également la définition de l'efficacité de propulsion avec la formule de Lighthill suivante :

$$\eta_L = \frac{\overline{T} U_{avg}}{\overline{T} U_{avg} + P_L} \quad (2.7)$$

où U_{avg} est la vitesse moyenne du poisson, \overline{T} la poussée moyenne et P_L la perte de puissance moyenne. Toutefois, les auteurs ne précisent pas comment ils calculent en pratique la poussée et la perte de puissance alors que ce n'est pas évident. En effet, les calculs des efforts donnent la résultante totale composée de la traînée D et de la poussée T :

$$F_x(t) = T(t) - D(t) \quad (2.8)$$

De plus, la perte de puissance peut être définie de plusieurs façons. Borazjani et Sotiropoulos [143] proposent une approche permettant de décomposer F_x en ses 2 composantes T et D et un calcul de la perte de puissance en fonction des déformations imposées. On voit ainsi la difficulté à définir une efficacité de propulsion lorsqu'on sort de l'habituel champ de modélisation dans lequel le solide n'a pas de mouvement libre.

C. Structure en grands déplacements

Dans cette dernière partie, on se concentre sur les modélisations structurelles reposant sur des équations d'état. On parle alors de structures *flexibles*. Il existe de nombreuses équations d'état permettant de modéliser les *déplacements* (variations de forme) et les *déformations* (variations de volume) d'une structure. On peut toutefois les classer en 4 catégories (sans parler de la plasticité bien au-delà du champ d'investigation de notre étude) :

1. petites déformations - petits déplacements : *élasticité linéaire*
2. petites déformations - grands déplacements : *hyperélasticité*
3. grandes déformations - petits déplacements : *hyperélasticité finie*
4. grandes déformations - grands déplacements : *hyperélasticité finie*

Ainsi, un modèle d'élasticité linéaire suffit pour de petits déplacements et de petites déformations [133, 144, 103, 145, 146, 44, 147]. Toutefois, dès qu'on a de grands déplacements, un modèle hyperélastique est nécessaire. De nombreuses lois de comportement non-linéaires existent (voir travaux de maîtrise [109]) mais c'est celle de Saint-Venant Kirchhoff qui est la plus répandue [111, 148, 149, 150] dans le cadre des interactions fluide-structure. Les autres modèles hyperélastiques sont encore peu utilisés dans le domaine de la CFD (Mooney-Rivlin [151], Neo-Hookien [152]). Le domaine de l'hyperélasticité finie reste donc encore à explorer. Concernant les profils oscillants, seule l'étude d'Etienne *et al.* [6] utilise un modèle hyperélastique.

Dans l'hypothèse de petits déplacements et petites déformations, les modèles d'élasticité linéaire peuvent être facilement mis en œuvre. Ainsi, en 1978, Katz et Weih [133]

modélisaient un profil flexible par une série de poutres soumis à un écoulement non-visqueux (sans séparation). Ils concluaient déjà que la flexibilité tend à diminuer la magnitude de la portance mais aussi à changer sa direction, ce qui a un effet bénéfique pour la propulsion. Ainsi, malgré une faible diminution de la poussée, l’efficacité de propulsion augmente de près de 20%. En 2010, Gopalakrishnan et Tafti [147] prenant en compte les phénomènes de séparation, dont le LEVS (*leading-edge vortex shedding*), avec une méthode 3D arrivent à des conclusions différentes tout en gardant une modélisation linéaire de la structure (membrane). La cambrure du profil induite par la flexibilité provoque une augmentation “considérable” de la poussée (jusqu’à 40%) et de la portance. Ils expliquent ce bénéfice par le fait que le LEVS reste attaché sur l’extrados du profil et glisse le long de la cambrure, couvrant la majeure partie du profil. Les forces sont alors plus importantes que pour un profil rigide. De plus, l’efficacité de propulsion n’augmente pas autant que dans l’étude précédente, passant d’environ 18% pour un profil rigide à un peu plus de 22% pour une flexibilité optimum.

La complexité des problèmes d’interactions fluide-structure limite fortement le nombre d’études numériques utilisant des modèles structuraux nonlinéaires. De ce petit nombre d’études, la plupart utilisent une plaque plane comme profil flexible [13, 101], les autres des éléments de types poutres gérés par des logiciels commerciaux spécialisés dans les structures [64, 58]. Ces approches simplifient la résolution du problème mais permettent de prendre en compte les effets de structures non-linéaires. Gogulapati *et al.* [64] ainsi que Zhu [101] ajoutent également une hypothèse d’écoulement potentiel, les premiers prenant en compte la séparation de l’écoulement et la formation du LEVS (mais ils ne présentent que des résultats préliminaires). Les équations de Navier-Stokes ne sont donc utilisées que par Chimakurthi *et al.* [58] et Tang *et al.* [57] qui sont aussi les seuls à faire des simulations avec un profil épais. Il faut noter que ces deux dernières études sont faites en 3D et les auteurs considèrent une flexibilité selon l’envergure du profil. On parle aussi alors d’aéroélasticité. En 2D, l’impact de la flexibilité selon la corde sera différent. On se concentrera sur cet aspect dans notre étude.

Ainsi, en 2D, une des conclusions de ces études est que la flexibilité induit une rotation de manière passive, qu’on peut caractériser par un *angle virtuel*. Il est défini entre les lignes qui relient le bord de fuite et le bord d’attaque du profil flexible d’un côté et d’un profil virtuel rigide de l’autre côté. Ceci donne aussi lieu à l’introduction de l’angle de déphasage entre le mouvement de battement et la rotation composée d’une partie imposée et d’une partie libre due à la flexibilité du profil. Enfin, d’un point de vue pratique, il devient alors possible d’imposer seulement un mouvement de battement au profil et d’utiliser la flexibilité du profil pour obtenir la rotation induite souhaitée. On retrouve ici la conclusion de Tay

et Lim [136] qui imposent une déformation au profil pour simuler sa flexibilité et indiquent qu'il est alors préférable d'utiliser un profil en battement pur. Ainsi, cette rotation passive induit une réduction de l'angle d'attaque effectif global du profil et ainsi une réduction des efforts (poussée et portance) [101, 64] et un retardement du décrochage dynamique du profil. Ainsi, Zhu [101] conclue à une baisse des performances à cause de la flexibilité mais il ne tient pas compte de la séparation de l'écoulement (et donc du rôle des LEVS). Avec une approche visqueuse, on se rend compte que la flexibilité tend à adapter l'angle d'attaque effectif local à l'écoulement, limitant ainsi les phénomènes de séparation du LEVS [13, 64] et aidant la convection des tourbillons générés (même conclusion qu'en élasticité linéaire [147]). Ce phénomène de recollement des LEVS assure des efficacités de propulsion supérieures à celles obtenues avec un profil rigide.

L'introduction d'une flexibilité pour des profils oscillants a donc un impact sur les performances d'un profil. Toutefois, selon les auteurs, les conclusions ne sont pas les mêmes sur les aspects bénéfiques ou non de la flexibilité. Il faut admettre que dans les études menées jusqu'à présent, les approximations faites pour modéliser le fluide (potentiel, sans séparation) masquent l'impact de la modélisation structurelle. En effet, les auteurs arrivent à des conclusions identiques avec les différentes modélisations pourvu qu'ils utilisent les mêmes hypothèses sur le fluide. Il y a donc une nécessité de mener des études d'interaction fluide-structure rigoureuses utilisant les équations de Navier-Stokes visqueuses d'un côté et une loi de comportement hyperélastique de l'autre afin d'analyser correctement ce problème complexe et de comprendre l'impact réel de la flexibilité sur les performances d'un profil oscillant.

2.2.3 Couplage IFS

Après avoir choisi une modélisation pour le fluide et une modélisation pour la structure, il est nécessaire de coupler numériquement ces deux parties constituant un problème d'IFS. Le couplage numérique est ainsi la partie clé de la résolution et doit permettre de préserver l'équilibre à l'interface. Deux approches sont alors possibles pour coupler fluide et structure [137] : les méthodes *faiblement couplées* ou les formulations *fortement couplées*.

A. L'approche faiblement couplée

D'une part, les méthodes *faiblement couplées* ou *étagées* [153, 154, 112] utilisent des algorithmes de résolution séparés pour le fluide, le pseudo-solide et la structure. Ce sont les méthodes les plus populaires, notamment parce qu'elles permettent l'utilisation de codes spécialisés déjà existants dans chaque domaine (soit dans le traitement d'écoulements soit

dans la résolution de problèmes structuraux). De plus, elles offrent la possibilité d'utiliser des pas de temps de résolution différents pour le fluide et pour la structure, permettant ainsi de l'adapter aux échelles de temps propres aux deux domaines. Enfin, cette approche minimise ainsi les ressources informatiques nécessaires et facilite l'implémentation de couplage numérique entre les équations fluides et structurelles sans demander d'adaptation majeure des codes de calcul spécifiques. En pratique, le couplage s'effectue alors de manière itérative : les efforts du fluide obtenus grâce à un logiciel de CFD sont transférées au code de dynamique des structures qui calcule les déplacements solides ; ces derniers sont alors transférés en retour au module de CFD jusqu'à convergence et obtention de la géométrie déformée. Ces approches étagées ont donc un certain coût causé par les itérations de convergence jusqu'à l'équilibre. De plus, comme le transfert de données est approximé à chaque itération, l'équilibre à l'interface n'est pas parfaitement satisfait. Un éloignement trop important de l'équilibre pourrait provoquer une explosion du couplage et la divergence du calcul.

B. L'approche fortement couplée

D'autre part, on trouve les formulations *fortement couplées* ou *monolithiques* [111, 155, 148] qui garantissent l'équilibre à l'interface fluide-structure. Ces approches monolithiques résolvent l'ensemble du système fluide-structure d'un seul bloc, ce qui garantit à tout moment l'équilibre à l'interface fluide-structure [6]. Leur implémentation est plus délicate que les approches faiblement couplées et nécessite des ressources informatiques plus importantes. Toutefois, elles sont plus stables que les méthodes faiblement couplées lorsqu'elles sont bien implémentées. Blom [137] confirme cet avantage sur un problème simple de piston en 1D (l'implémentation étant trop complexe pour être testée). Alors que pour des pas de temps petits il n'y a pas vraiment de différence entre une approche faiblement couplée et une approche monolithique, l'algorithme étagé produit une déviation non-physique par rapport à l'équilibre lorsqu'on augmente le pas de temps. L'approche monolithique reste alors stable même pour des pas de temps importants. On a donc opté pour une approche monolithique directe, ou entièrement couplée, dans notre étude, basée sur l'approche *pseudo-solide* continue de Sackinger *et al.* [121].

2.2.4 Voies de recherche pour les IFS

On peut conclure cette revue de littérature sur les interactions fluide-structure en reprenant le constat fait par Shyy *et al.* [18] en 2010. Il y a actuellement des lacunes à combler dans la compréhension des phénomènes d'interaction fluide-structure pour des

profils oscillants, notamment à bas nombre de Reynolds. En effet, il y a un manque à la fois de données expérimentales mais aussi de méthodes numériques pour simuler des profils flexibles oscillants. Ceci confirme l'importance de disposer d'un modèle numérique complet pour simuler ce processus extrêmement complexe et la nécessité de disposer d'outils de modélisation très avancés pour étudier l'introduction d'une flexibilité au profil.

L'étude des différents travaux numériques existants (voir tableau 2.9) a plus particulièrement mis en lumière certaines voies de recherche susceptibles d'améliorer la simulation des problèmes d'interaction fluide-structure en grands déplacements dans le contexte des profils oscillants :

- prise en compte des forces visqueuses et des LEVS (*leading-edge vortex shedding*) dans la partie fluide (équations de Navier-Stokes) ;
- modélisation correcte des grands déplacements à l'aide d'équations d'état hyperélastiques ;
- application d'une approche monolithique (fortement couplée) à des profils oscillants ;
- introduction des équations d'aéroélasticité permettant un libre mouvement de corps rigide des profils oscillants.

Ces améliorations numériques permettront ainsi une meilleure modélisation et compréhension des phénomènes IFS notamment dans les domaines suivants :

- étude précise de l'influence de la flexibilité pour un profil oscillant soumis à un écoulement visqueux ;
- simulation de structures subissant des vibrations induites arbitraires (grands déplacements) ;
- prise en compte de l'avancée du profil autopropulsé lors de l'étude de son efficacité à produire de la poussée.

Auteur, Année	Équations fluides	Méthode de résolution	Modèle de structure
Toomey[134] 2006	2D potentielles	DVM (+séparation)	1 rotation libre
Miao[35] 2006	3D N-S	Logiciel FLUENT	Déformation imposée
Zhu[101] 2007	3D potentielles	Méthode des panneaux	Plaque plane non-linéaire
Tang[57] 2008	3D N-S	Logiciel STREAM	Logiciel UM/NLABS
Gogulapati[64] 2008	2D potentielles	DVM (+séparation)	Logiciel MARC
Chimakurthi[58] 2009	3D N-S	Logiciel STREAM	Logiciel MARC
Gopalakrishnan[147] 2010	3D N-S, LES	Volumes finis	Membrane linéaire

Tableau 2.9 Principales études numériques IFS sur des profils oscillants.

2.3 Intégration en temps

There are at least two ways to combat stiffness. One is to design a better computer, the other, to design a better algorithm.

H. Lomax, tiré de [1]

Grâce à l'approche *monolithique implicite*, il est possible de simuler des problèmes d'interaction fluide-structure fortement couplés. Toutefois, la simulation de ce type de problèmes raides reste très coûteuse en temps lorsqu'on cherche à étudier les comportements dynamiques sur une longue période. Comme le dit Lomax, il ne reste plus qu'à acheter des meilleurs ordinateurs ou, à défaut, à améliorer les performances des algorithmes d'intégration en temps. Cette partie s'intéresse ainsi à l'efficacité de l'intégration en temps qui est d'une importance cruciale. Tout d'abord, on présente les concepts théoriques importants de l'intégration en temps des problèmes raides tels que les interactions fluide-structure. Ensuite, on expose les différentes approches mises en pratique pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires. Enfin, le choix du schéma d'intégration de *Runge-Kutta implicite Radau-IIA* est expliqué.

2.3.1 Problèmes raides

A-stability is not the whole answer to the problem of stiff equations.

R. Alexander, tiré de [1]

Comme le soulignent Hairer et Wanner [1] dans leur introduction du chapitre IV, la notion de problèmes raides reste encore très difficile à définir mathématiquement bien qu'on puisse en avoir une définition intuitive basée sur l'expérience. La première et la plus pragmatique des définitions a été donnée par Curtiss et Hirschfelder [156] en une simple phrase : “*stiff equations are equations where certain implicit methods, in particular BDF², perform better, usually tremendously better, than explicit ones*”. Plus concrètement, ils proposent l'exemple raide 1D suivant :

$$y' = -\alpha(y - \cos(t)), \quad \alpha = 50, \quad y(0) = y_0 \quad (2.9)$$

Selon la condition initiale y_0 , la solution de cette équation est une courbe au voisinage de $y \approx \cos(t)$ précédée d'une rapide phase de transition depuis y_0 si $y_0 \neq \cos(0) = 1$. Une telle transition est typique des équations raides sans être une condition ni nécessaire ni suffisante. Hairer et Wanner [1] présentent des résultats numériques pour une équation encore plus raide avec $\alpha = 2000$ et $y_0 = 0$ (voir figure 2.4). On observe une bonne tenue du schéma d'Euler implicite mais les solutions obtenues avec des schémas implicites de Crank-Nicolson (ou règle du trapèze, *impl. Trap.*) subissent des oscillations parasites, dues à la phase de transition initiale. Ainsi, même des schémas implicites peuvent ne pas être suffisants pour résoudre des problèmes très raides.

Le concept de stabilité des schémas d'intégration doit donc être précisé. Habituellement, le critère de stabilité linéaire (CFL par exemple) définit un domaine sur lequel le schéma d'intégration est stable. On parle de méthodes *A-stables* lorsqu'il n'y a aucune restriction (aucun critère) sur le domaine de stabilité pour l'équation suivante :

$$y' = \lambda y, \quad \Re(\lambda) < 0 \quad (2.10)$$

Autrement dit, on peut choisir n'importe quel pas de temps Δt sans mettre en péril la stabilité de l'intégrateur en temps. Contrairement aux méthodes explicites, le schéma d'Euler implicite ainsi que les schémas implicites de Runge-Kutta sont tous *A-stables*. Les schémas de Crank-Nicolson possèdent aussi cette propriété de *A-stabilité*. Toutefois, comme on le voit sur

2. BDF : *backward difference formulae* ou formules aux différences finies arrières, ce sont des schémas à pas multiples.

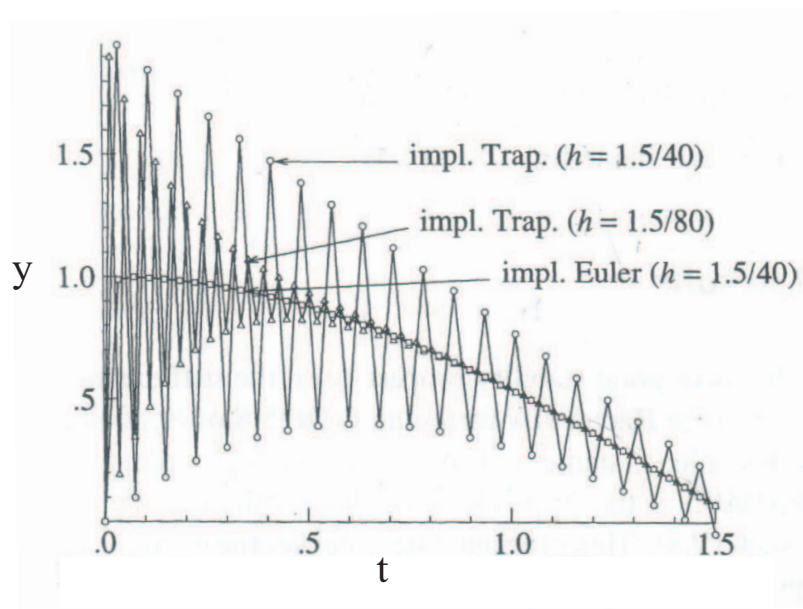


Figure 2.4 Crank-Nicolson (non L -stable) versus Euler implicite (L -stable), tiré de [1]

la figure 2.4, le schéma de Crank-Nicolson est fortement affecté par la phase transitoire ce qui provoque des oscillations parasites de la solution et une convergence très lente vers la solution. Une convergence rapide vers la solution recherchée apparaît ainsi comme une propriété souhaitable des schémas d'intégration, on parle alors de L -stabilité. Ainsi, les méthodes L -stables ne sont pas sensibles au fait qu'une équation soit dite raide. Contrairement au schéma de Crank-Nicolson, le schéma d'Euler implicite ainsi que les formules implicites de Runge-Kutta (IRK) Radau-IIA sont L -stables, et même *précises pour les équations raides* [1]. Concernant les méthodes à pas multiples (règle du trapèze, BDF, Newmark), le théorème de Dahlquist limite leur ordre de précision p . En effet, ces méthodes ne peuvent posséder la propriété de A -stabilité seulement si $p \leq 2$. Le tableau 2.10 résume les propriétés de stabilité de différents schémas implicites.

Comme le souligne Saint-Amand [157], en plus des problèmes de stabilité, la résolution de problèmes raides peut également induire des *réductions d'ordre* des schémas d'intégration étagés à pas unique. En effet, chaque étage des méthodes à pas unique possède un ordre q de précision propre qui peut différer de l'ordre global p de la méthode. Ainsi, sur des problèmes raides, l'ordre de la méthode peut diminuer de p à q_{max} , l'ordre maximal de chaque étage. Hairer et Wanner [1] présentent un tableau (tableau 15.1, p226) des ordres de convergence des erreurs pour les différentes méthodes IRK dans le cas de problèmes raides. Avec un

	Schémas	Ordre	A-stable	L-stable	Précis pour les éq. raides
Pas multiples	Euler implicite	1	oui	oui	oui
	Crank-Nicolson	2	oui	non	-
	BDF2 (schéma de Gear)	2	oui	oui	-
	BDFp ($p > 3$)	p	non	non	-
	Newmark (accélération moyenne)	2	oui	?	-
IRK	Gauss	2s	oui	non	non
	Radau-IA	2s-1	oui	oui	non
	Radau-IIA	2s-1	oui	oui	oui
	Lobatto-IIIA	2s-2	oui	non	non
	Lobatto-IIIB	2s-2	oui	non	non
	Lobatto-IIIC	2s-2	oui	oui	oui

Tableau 2.10 Propriétés de stabilité de différents schémas implicites. Pour les schémas IRK, s représente le nombre d'étages.

pas de temps constant, on peut en déduire les ordres de convergence réduits des schémas IRK appliqués aux problèmes raides comme le résume le tableau 2.11. Sans entrer dans les détails, on note que certains travaux [158] visent à améliorer les méthodes IRK classiques afin de contrer ces effets de réduction d'ordre.

Enfin, les équations de Navier-Stokes incompressibles induisent une raideur supplémentaire. Elles forment en effet un système d'équations différentielles-algébriques (EDA) d'index 2 [1, 157], qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y) \end{cases} \quad (2.11)$$

où y représente le vecteur de vitesse du fluide et z la pression qui est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte d'incompressibilité $g(y) = 0$. La question est alors de savoir si les schémas d'intégration en temps conservent leur précision dans le cas d'EDA d'index 2, notamment pour le multiplicateur de Lagrange. Le tableau 2.12 (tiré de [1]) résume les ordres de convergence des erreurs globales pour les schémas IRK appliqués aux EDA d'index 2. On constate une réduction d'ordre du schéma pour le multiplicateur de Lagrange, *i.e.* la pression. Notamment, pour les méthodes SDIRK (*singly diagonally implicit Runge-Kutta*), la convergence reste linéaire sur la pression quelque soit le nombre d'étages. Pour les méthodes Radau-IIA, l'ordre de convergence est réduit pour la pression à s au lieu de $(2s - 1)$. Il existe toutefois des techniques [159] pour améliorer l'ordre de convergence sur le multiplicateur de

Schémas	Ordre global	Ordre pour les équations raides
Gauss $\begin{cases} s \text{ impair} \\ s \text{ pair} \end{cases}$	$2s$	$\begin{cases} s+1 \\ s \end{cases}$
Radau-IA	$2s-1$	s
Radau-IIA	$2s-1$	s
Lobatto-IIIA $\begin{cases} s \text{ impair} \\ s \text{ pair} \end{cases}$	$2s-2$	$\begin{cases} s-1 \\ s \end{cases}$
Lobatto-IIIB $\begin{cases} s \text{ impair} \\ s \text{ pair} \end{cases}$	$2s-2$	$\begin{cases} s-1 \\ s \end{cases}$
Lobatto-IIIC	$2s-2$	$s-1$

Tableau 2.11 Réduction d'ordre des schémas IRK appliqués aux problèmes raides avec un pas de temps constant.

Lagrange pour ces schémas Radau-IIA. Concernant les schémas BDFp, leur convergence reste d'ordre p sur l'écoulement et sur la pression si la précision sur les valeurs initiales des vitesses est d'ordre $p+1$. Ainsi, le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre 2 en pression. Ce résultat se généralise aux autres méthodes à pas multiples si en plus la précision sur les valeurs initiales de la pression est d'ordre p [1].

Les interactions fluide-structure en grands déplacements présentent un bel exemple de problème raide. Non seulement les équations fluides forment un système d'EDA d'index 2 mais en plus les grands déplacements structurels rendent le problème encore plus raide. L'application de schémas d'intégration en temps aux IFS est donc un défi tant au niveau de la stabilité que de la précision.

2.3.2 Intégration en temps des IFS

Jusqu'à récemment, les différentes études sur les IFS étaient au mieux basées sur des méthodes d'intégration en temps du second ordre [160, 161, 162, 163, 152, 3]. Désormais, grâce à une puissance de calcul grandissante, l'utilisation de méthodes d'intégration en temps d'ordres supérieurs devient possible. Par exemple, van Zuijlen et Bijl [164] ont démontré *"the excellence of higher order schemes (up to fifth) over the popular second order backward-difference scheme (BDF)"* pour un problème d'IFS linéaire sur un piston. Yang et Mavriplis [165] confirment la prééminence de l'efficacité globale d'un schéma d'ordre élevé IRK64 sur celle des schémas BDF en procédant à une étude de raffinement du pas de temps sur un problème IFS 3D avec un écoulement compressible non-visqueux.

Méthode	Étages	Erreur globale	
		écoulement	pression
Gauss	s impair	Δt^{s+1}	Δt^{s-1}
	s pair	Δt^s	Δt^{s-2}
Radau-IA	s	Δt^s	Δt^{s-1}
Radau-IIA	s	Δt^{2s-1}	Δt^s
Lobatto-IIIA	s impair	Δt^{2s-2}	Δt^{s-1}
	s pair	Δt^{2s-2}	Δt^s
Lobatto-IIIC	s	Δt^{2s-2}	Δt^{s-1}
SDIRK3	3	Δt^2	Δt^1
SDIRK5	5	Δt^2	Δt^1

Tableau 2.12 Estimation de l'erreur pour les problèmes d'index 2 [1].

L'intégration en temps, quelque soit l'ordre de précision, repose sur des approches explicite, implicite ou mixte. Les approches totalement explicites doivent être proscrites pour résoudre des problèmes raides (comme les IFS) à cause de leur manque de stabilité. En effet, le critère de stabilité (CFL par exemple) restreint la valeur du pas de temps. Elle diminue ainsi lorsque le maillage se raffine. Alors, bien que la résolution pour un pas de temps soit peu coûteuse, la résolution globale du problème devient alors très coûteuse puisque le nombre de pas de temps augmente pour mener une simulation sur une période de temps donnée. A l'opposé, les intégrateurs implicites coûtent plus cher à chaque pas de temps mais sont très efficaces pour les problèmes raides (jusqu'au 17^e ordre pour des systèmes mécaniques [166]) et inconditionnellement stables. Le choix de la longueur du pas de temps dépend alors seulement de la précision recherchée et non pas d'un critère de stabilité. Toutefois, il semble difficile d'implémenter des méthodes d'intégration totalement implicites, notamment pour les approches étagées de résolution d'IFS. Ainsi, les schémas mixtes (IMEX : implicite/explicite) ou de Runge-Kutta explicite diagonalement implicite et à valeur uniforme sur la diagonale (ESDIRK : *explicit single diagonal implicit Runge-Kutta*) [157] sont les plus populaires [164, 165]. Mêmes s'ils sont performants, ils n'ont cependant pas les mêmes propriétés de stabilité que les méthodes totalement implicites. En effet, dans le domaine des écoulements incompressibles (EDA d'index 2), les schémas ESDIRK possèdent l'inconvénient majeur de réduire la précision en temps sur la pression (premier ordre) ce qui restreint fortement leur utilisation. Avec l'approche IMEX, la composante raide (les équations fluides et structurelles) est traitée avec un schéma implicite pour des raisons de stabilité. Toutefois, ce schéma est souvent un intégrateur ESDIRK. L'autre composante non-raide (les termes de couplage) est intégrée à

l'aide de schémas explicites d'ordres élevés pour obtenir une grande précision en temps à moindre coût.

Le tableau 2.13 expose une compilation de quelques contributions à l'intégration en temps dans le contexte des interactions fluide-structure. Bien que les approches d'ordres élevés (supérieurs à 2) soient de plus en plus utilisées pour la simulation des écoulements fluides, on constate qu'elles restent marginales dans le domaine de l'IFS. De plus, elles sont souvent utilisées comme un simple outil ou "boîte noire", sans aucune vérification de leurs efficacités présumées. Ainsi, l'application de schémas d'ordres élevés sur des problèmes d'IFS soulèvent plusieurs questions : sont-ils encore stables pour des problèmes raides d'IFS ? Conservent-ils leur efficacité théorique sur des domaines déformables ? Leur précision est-elle conservée avec des écoulements incompressibles ?

La plupart des études prennent bien en compte la déformation du maillage en introduisant des sortes de lois de conservation géométriques mais sans vérifier les trois niveaux de conformité précédemment décrits. Seulement trois auteurs [164, 165, 149] s'intéressent à cet aspect, au moins partiellement, avec des études de convergence en temps. Hübner *et al.* [149] confirment l'efficacité de leur schéma d'intégration en temps de Galerkin discontinu d'ordre 3 à l'aide d'une étude de convergence sur le cas d'un piston en mouvement 1D dans un liquide non-visqueux. Sur le même cas, van Zuijlen *et al.* [164] vérifient que leur approche IMEX d'ordre élevé est plus efficace qu'une approche monolithique avec un schéma BDF du deuxième ordre (BDF2). Toutefois, le schéma BDF2 est aussi efficace que le schéma IMEX d'ordre 3. De plus, l'étude de raffinement en pas de temps n'est pas concluante concernant l'ordre de la précision en temps puisque les taux de convergence sont calculés par rapport au coût de calcul et non pas par rapport à la longueur des pas de temps utilisés. Finalement, ils observent un comportement instable de l'intégrateur IMEX lorsque la longueur du pas de temps augmente, même pour un problème linéaire. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'approche IMEX n'est pas inconditionnellement stable puisqu'elle utilise un schéma explicite pour résoudre les termes de couplage. Yang et Mavriplis [165] ont développé une approche fortement couplée basée sur des méthodes BDF et ESDIRK. Ils construisent spécialement leurs différents schémas d'intégration en temps pour satisfaire la GCL. Leurs nombreuses études de convergence en temps confirment que l'utilisation de méthodes d'intégration d'ordres élevés donne des résultats stables et précis. Toutefois, seulement le schéma BDF2 maintient son ordre de précision en temps théorique. Ainsi, l'intégrateur BDF3 (non *L-stable*) devient instable pour de larges pas de temps, notamment lorsqu'interviennent des modes structurels de hautes fréquences. De même, l'utilisation du schéma ESDIRK d'ordre 4 révèle un taux réduit de convergence autour de 3. Aucune explication n'est avancée par les auteurs pour expliquer ces réductions d'ordre. Cependant, on peut penser que cela est en

Auteur, Année	Couplage	Int. temp.	Ordre	ALE	GCL	Étude conv.	Inc.
Wall 1999 [162]	étagé	?	Δt^2	oui	oui	non	oui
Matthies 2003 [160]	étagé	bloc-Newton implicite	?	oui	non	non	oui
Jan 2004 [161]	étagé	Euler expli- cite/ERK4	Δt^1	oui	oui	non	oui
Hübner 2004 [149]	mono.	Galerkin discontinu	Δt^3	oui	oui	oui	oui
de Bortoli 2005 [167]	?	ERK	Δt^4	oui	non	non	non
Dettmer 2006 [163]	étagé	α -méthode généralisée	Δt^2	oui	oui	non	oui
Valdés-Vásquez 2007 [168]	étagé	α -méthode généralisée	Δt^2	oui	non	non	oui
Yang 2007 [165]	étagé	ESDIRK	Δt^4	oui	oui	oui	non
van Zuijlen 2007 [169]	étagé	IMEX (ESDIRK4)	Δt^4	oui	oui	oui	non
Wood 2008 [152]	étagé	BDF2/Newmark amorti	Δt^2	oui	oui	non	oui
De Nayer 2009 [3]	étagé.	BDF2/Newmark amorti	Δt^2	non	-	non	oui
Présente étude	mono.	IRK	Δt^5	oui	oui	oui	oui

Tableau 2.13 Caractéristiques de quelques schémas appliqués aux IFS. Couplage (étagé (*segregated*), mono. : monolithique), intégrateur en temps pour le fluide/la structure (IMEX : implicite/explicite Runge-Kutta, ERK : Runge-Kutta explicite, IRK : Runge-Kutta implicite), la précision en temps annoncée, utilisation d’une approche ALE, respect de la GCL, occurrence d’une étude de convergence en temps et incompressibilité de l’écoulement.

partie dû à la manière explicite de traiter l'interface entre fluide et structure.

Finalement, à cause de la complexité de résolution des IFS, nous n'avons trouvé aucune étude utilisant une approche temporelle totalement implicite lors de notre revue de littérature. Pourtant, ce type d'approche permettrait une amélioration notable de la précision et surtout de la stabilité des schémas.

Un dernier questionnement important survient lorsqu'on traite la partie structurelle du problème d'interaction. En effet, comme présenté par Valdés-Vásquez [168], les non-linéarités géométriques de la structure induisent un transfert d'énergie entre un nombre infini de modes de déformation. Si l'intégrateur en temps n'est pas adapté, ces non-linéarités peuvent introduire des oscillations parasites de hautes fréquences lors de simulations sur une longue période de temps. Les méthodes de Newmark sont donc abandonnées au profits de schémas amortis (Bossak ou α -méthodes généralisées) qui augmentent la dissipation pour les modes de hautes fréquences sans trop dégrader la précision en temps contrairement au schéma de Newmark amorti dont l'ordre est réduit à 1 [170, 163, 168, 152, 3]. De même, les méthodes ESDIRK sont construites de manière à amortir les modes de hautes fréquences [164]. Cependant, la dissipation numérique supprime également les modes structurels réels de hautes fréquences. Ce phénomène peut être évité en utilisant des schémas de Runge-Kutta totalement implicites, sans aucune dissipation numérique, comme présenté dans la présente étude. En effet, l'excellente stabilité de ces schémas prévient naturellement toutes oscillations parasites sans tronquer la physique du problème (voir section 5.1.3).

2.3.3 Schéma de Runge-Kutta implicite Radau-IIA

La section 2.3.1 a mis en évidence les difficultés de stabilité et de précision rencontrées par les schémas d'intégration en temps pour résoudre des problèmes raides. Il est donc primordial de choisir une méthode stable et précise pour simuler les interactions fluide-structure en grands déplacements qui présentent non seulement un système d'EDA d'index 2 à cause de l'incompressibilité du fluide mais aussi une grande raideur créée par les grands déplacements structurels.

Tout d'abord, la simulation de problèmes IFS instationnaires requiert le calcul d'un grand nombre d'inconnues (fluide+structure+couplage) sur de longues périodes de temps pour saisir les phénomènes instationnaires. Les méthodes d'intégration d'ordres élevés semblent donc une voie intéressante afin de réduire les temps de calcul. Les méthodes à pas unique sont alors plus avantageuses que les méthodes à pas multiples qui ne sont pas *A-stables* pour un ordre supérieur à 3. Les mêmes raisons de stabilité poussent logiquement

à l'utilisation de méthodes implicites.

Parmi les méthodes implicites à pas unique, on se concentre sur les méthodes de Runge-Kutta (IRK). Elles sont construites de différentes manières. Les méthodes dites de *Radau-IIA* et *Lobatto-IIIC* sont *A-stables*, *L-stables* et précises pour les équations raides d'après le tableau 2.10. Malgré un ordre de convergence supérieur pour un même nombre de pas temps, les méthodes de *Gauss* ne sont pas *L-stables*. De plus, dans le cadre des EDA d'index 2, elles subissent une importante réduction d'ordre de convergence comme le montre le tableau 2.12. On remarque d'ailleurs que les méthodes *SDIRK* d'ordres élevés sont à proscrire lorsqu'on veut traiter un fluide incompressible car elles sont seulement linéaires en pression. Quid alors des méthodes *ESDIRK* ? Finalement, les méthodes *Radau-IIA* sont plus précises d'un ordre que les méthodes *Lobatto-IIIC* dans tous les cas.

2.3.4 Une nouvelle approche d'intégration en temps

Le choix d'une approche *monolithique implicite* basée sur une méthode d'intégration IRK de *Radau-IIA* pour résoudre des problèmes d'interactions fluide-structure est donc entièrement justifié tant au niveau de la stabilité que de la précision. Pourtant, d'après la revue de littérature présentée à la section 2.3.2, cela semble être une nouveauté à plusieurs points de vue. Tout d'abord, les méthodes de Runge-Kutta utilisées ont toujours une part explicite, notamment pour gérer les termes d'interface. On propose dans cette présente étude une approche reposant entièrement sur des méthodes implicites de Runge-Kutta à la fois pour le fluide, la structure et les termes de couplage. De plus, contrairement aux méthodes multipas, les IRK n'ont pas besoin de dissipation des hautes fréquences pour rester stables, même pour des ordres de précision élevés. D'ailleurs, la plupart des études sur les interactions fluide-structure sont menées avec des schémas d'ordre inférieur ou égal à 2. Certains travaux utilisent tout de même des schémas d'ordres 3 et 4 mais ne vérifient pas le maintien de cette précision lors de leur application à des problèmes raides d'interaction fluide-structure. La présente étude utilise des schémas IRK d'ordre 1 à 5 et étudie leur précision dans le cas de problèmes raides.

2.4 Conclusion

Cette revue de littérature met donc en lumière le besoin d'améliorer encore les modèles numériques pour simuler les phénomènes provoqués par un profil oscillant même si de nombreux progrès ont été faits dans les dernières années. Les améliorations doivent notamment porter la résolution des équations instationnaires visqueuses de Navier-Stokes (nécessaires

pour modéliser la physique complexe des profils oscillants) dans le contexte de problèmes d'interaction fluide-structure. L'introduction d'une flexibilité du profil ainsi que le mouvement induit d'un profil autopropulsé complexifient d'autant plus la modélisation de ces phénomènes d'interactions fluide-structure mais donne déjà des résultats prometteurs dans le domaine de la propulsion. Afin de résoudre efficacement ces problèmes fortement couplés, il apparaît alors nécessaire d'améliorer les schémas d'intégration en temps tant pour des raisons de stabilité et que de précision, et donc de temps de calcul.

Le but du présent travail de recherche est donc de simuler numériquement des processus d'extraction de puissance d'un écoulement fluide et de propulsion grâce à un profil flexible en grands déplacements. Pour atteindre ce but, on établit plusieurs objectifs spécifiques :

- Développer les outils nécessaires à la simulation numérique d'un profil oscillant en grands déplacements ;
- Développer une approche précise et rapide de calcul des phénomènes d'interaction fluide-structure instationnaires ;
- Vérifier l'approche sur des solutions analytiques et avec des données expérimentales ;
- Appliquer la méthodologie à une large gamme de mouvement de profils flexibles oscillants en grands déplacements.

CHAPITRE 3

MÉTHODOLOGIE

La mécanique est le paradis des sciences mathématiques, car c'est avec la mécanique qu'on touche au fruit mathématique.

Léonard de Vinci

Pour remplir les buts et objectifs définis dans les chapitres précédents, on met en place une approche spécifique aux problèmes d'interaction fluides-structure en grands déplacements. La méthodologie et le code numérique de simulation s'appuient sur nos précédents travaux de maîtrise [109] auxquels on ajoute 5 volets spécifiques. Tout d'abord, il est important de réaliser une analyse dimensionnelle rigoureuse des phénomènes d'IFS afin d'en faire ressortir les valeurs caractéristiques. Dans un second temps, on présente la modélisation mathématique de ces phénomènes grâce aux équations appropriées. Le troisième volet important de la méthodologie concerne la gestion particulière de la déformation du maillage pour des grands déplacements. Les techniques d'intégration en temps sont l'objet de la quatrième partie. Enfin, on expose la stratégie de résolution s'appuyant sur la *méthode des éléments finis* (MEF).

3.1 Analyse dimensionnelle

Notre revue de littérature (voir chapitre 2) a clairement mis en lumière le manque d'un système de notations unifié pour les problèmes d'interaction fluide-structure. Chaque auteur utilise en effet son système propre et il est alors difficile de comparer les différentes études. De plus, les valeurs caractéristiques ne sont pas toujours clairement identifiées de sorte que les études paramétriques ne s'interprètent pas toujours aisément. Enfin, dans le cadre de simulation numérique, il est important d'adimensionnaliser correctement les équations car cette opération agit comme un préconditionneur naturel des équations et facilite la tâche du solveur.

Une analyse dimensionnelle rigoureuse des phénomènes d'interaction fluide-structure est donc nécessaire pour combler ces lacunes et classer les différents types de problèmes d'interaction fluide-structure.

3.1.1 Hypothèses

Cette analyse se veut la plus générale possible. Toutefois pour qu'elle soit pertinente on va tenir compte des hypothèses qui s'appliquent dans le cadre de notre étude :

- l'écoulement est considéré laminaire ;
- le fluide et le solide sont contenus dans des domaines disjoints ;
- il n'y a pas d'échange de masse entre les deux milieux ;
- la température y est uniforme et constante dans le temps ;
- le fluide est incompressible ;
- on néglige la gravité ;
- il n'y a pas d'amortissement structurel.

3.1.2 Variables d'un problème général d'IFS

Malgré les hypothèses considérées, l'analyse dimensionnelle reste indépendante des équations utilisées et repose simplement sur les différents variables du problème. De Langre [171] les classent en trois types :

- **Les variables indépendantes :**
 - les coordonnées géométriques $\mathbf{x} = (x, y, z)$;
 - le temps t .
- **Les variables dépendantes :**
 - dans le fluide : la vitesse \mathbf{u}_f et la pression p ;
 - dans la structure : la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et le déplacement $\boldsymbol{\chi}$.
- **Les paramètres physiques et les données :**
 - paramètres physiques du fluide : masse volumique ρ_f et viscosité dynamique μ_f ;
 - paramètres physiques de la structure : masse volumique ρ_s , module d'Young E et coefficient de Poisson ν ;
 - données communes au fluide et au solide : longueur caractéristique du domaine l_0 ;
 - données propres au fluide : une vitesse de référence U_0 et une pression de référence p_0 ;
 - données propres au solide : un déplacement de référence ξ_0 ;
 - données propres au solide rigide : une masse m , un angle de rotation θ_0 , une amplitude de battement h_0 et une fréquence d'oscillation f_0 .

Ainsi, pour un temps t et une position spatiale \mathbf{x} donnés, on peut exprimer la dépendance de chaque variable dépendante U en fonction des divers paramètres caractérisant le problème :

$$U(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t, \rho_f, \mu_f, \rho_s, E, \nu, l_0, U_0, p_0, \xi_0, m, \theta_0, h_0, f_0) \quad (3.1)$$

3.1.3 Analyse couplée

Dans les cadres des problèmes d'interaction fluide-structure, on procède à une analyse dimensionnelle couplée en considérant que les variables dépendantes de chaque milieu dépendent des paramètres physiques des deux milieux. Ainsi, grâce au théorème de *Vaschy-Buckingham* [171], ou théorème de π , on peut réduire le nombre de variables dans la relation 3.1 en considérant des paramètres adimensionnels. Ils sont construits par combinaison des variables dimensionnelles, en considérant seulement leurs dimensions physiques [171, 172] (M :masse, L :longueur, T :temps) :

$$\left| \begin{array}{l} [\mathbf{x}] = L \\ [t] = T \\ [\rho_f] = ML^{-3} \\ [\mu_f] = ML^{-1}T^{-1} \\ [\rho_s] = ML^{-3} \\ [E] = ML^{-1}T^{-2} \\ [\nu] = \emptyset \\ [l_0] = L \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} [U_0] = LT^{-1} \\ [p_0] = ML^{-1}T^{-2} \\ [\xi_0] = L \\ [m] = M \\ [\theta_0] = \emptyset \\ [h_0] = L \\ [f_0] = T^{-1} \\ [U] = \text{variable} \end{array} \right|$$

On observe qu'il existe au moins trois paramètres dimensionnellement indépendants : ρ_f, l_0, U_0 pour 16 grandeurs caractérisant les problèmes d'interaction fluide-structure, en considérant U une variable dépendante quelconque. Le théorème de *Vaschy-Buckingham* indique alors qu'il existe $(16-3) = 13$ grandeurs sans dimensions π_j caractérisant complètement le problème (dont une concernant la variable dépendante). On peut former ces nombres de différentes manières selon le choix du noyau de 3 grandeurs dimensionnelles. Si on prend

arbitrairement ρ_f, l_0, U_0 comme noyau, on obtient les 12 nombres adimensionnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \pi_1 & = & \rho_f^{a_1} l_0^{b_1} U_0^{c_1} \mathbf{x} & = \frac{\mathbf{x}}{l_0} & x^* : \text{position adimensionnelle} \\ \pi_2 & = & \rho_f^{a_2} l_0^{b_2} U_0^{c_2} t & = \frac{U_0 t}{l_0} & t^* : \text{temps adimensionnel} \\ \pi_3 & = & \rho_f^{a_3} l_0^{b_3} U_0^{c_3} \mu_f & = \frac{\mu_f}{\rho_f U_0 l_0} & \text{Re}^{-1} : \text{nombre de Reynolds} \\ \pi_4 & = & \rho_f^{a_4} l_0^{b_4} U_0^{c_4} \rho_s & = \frac{\rho_s}{\rho_f} & M_{flex} : \text{nombre de Masse (flexible)} \\ \pi_5 & = & \rho_f^{a_5} l_0^{b_5} U_0^{c_5} E & = \frac{E}{\rho_f U_0^2} & C_{\Upsilon}^{-1} : \text{nombre de Cauchy} \\ \pi_6 & = & \rho_f^{a_6} l_0^{b_6} U_0^{c_6} \nu & = \nu & \nu : \text{coefficient de Poisson} \\ \pi_7 & = & \rho_f^{a_7} l_0^{b_7} U_0^{c_7} p_0 & = \frac{p_0}{\rho_f U_0^2} & \text{Eu} : \text{nombre d'Euler} \\ \pi_8 & = & \rho_f^{a_8} l_0^{b_8} U_0^{c_8} \xi_0 & = \frac{\xi_0}{l_0} & D : \text{déplacement réduit} \\ \pi_9 & = & \rho_f^{a_9} l_0^{b_9} U_0^{c_9} m & = \frac{m}{\rho_f l_0^3} & M_{rigide} : \text{nombre de Masse (rigide)} \\ \pi_{10} & = & \rho_f^{a_{10}} l_0^{b_{10}} U_0^{c_{10}} \theta_0 & = \theta_0 & \theta_0 : \text{angle de rotation} \\ \pi_{11} & = & \rho_f^{a_{11}} l_0^{b_{11}} U_0^{c_{11}} h_0 & = \frac{h_0}{l_0} & h_0^* : \text{amplitude de battement adim} \\ \pi_{12} & = & \rho_f^{a_{12}} l_0^{b_{12}} U_0^{c_{12}} f_0 & = \frac{f_0 l_0}{U_0} & f^* : \text{fréquence réduite} \end{array} \right.$$

La construction de ces paramètres fait ainsi apparaître des nombres adimensionnels classiques :

- **Re** : le **nombre de Reynolds** mesure l'importance relative des vitesses de convection et de diffusion visqueuse. À très bas Reynolds (ordre 100), les phénomènes visqueux ne sont donc pas négligeables.
- M_{flex} : le **nombre de masse** pour une structure flexible représente le rapport des densités du fluide et du solide. C'est un terme de couplage.
- C_Υ : le **nombre de Cauchy** reflète le couplage entre le fluide et la structure. Il mesure l'ordre de grandeur des déformations (liées à E) consécutives à la pression dynamique $\rho_f U_0^2$. Plus le nombre de Cauchy est grand, plus la structure immergée est flexible.
- ν : le **coefficient de Poisson** permet de caractériser la contraction de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué. Il est compris entre 0 et 0.5. Plus sa valeur se rapproche de 0.5 et plus la structure devient incompressible (pas de changement de volume).
- Eu : le **nombre d'Euler** représente le rapport des forces de pression sur les forces d'inertie (il peut servir à caractériser les pertes de pression dans un fluide en mouvement).
- M_{rigide} : l'équivalent du **nombre de masse** pour une structure rigide.
- f^* : la **fréquence réduite** permet de déterminer dans quelle mesure le mouvement du solide peut modifier l'écoulement. Lorsque sa valeur est petite devant 1, la distance parcourue par une particule fluide pendant une période d'oscillation est grande devant la longueur de la structure. L'écoulement se comporte comme si les oscillations n'existaient pas et on dit qu'il est quasi-stationnaire, c'est à dire qu'à chaque instant on peut le considérer stationnaire pour chaque position instantanée de la structure. Par contre, plus f^* sera grand, plus on devra tenir compte de l'instationnarité du système.

Le 13e nombre adimensionnel $\pi_{13} = U^*$ concerne la variable dépendante étudiée U et s'écrit $\pi_{13} = U^*$:

$$\text{Pour } U : \left\{ \begin{array}{ll} \pi_{13} = \rho_f^{a_{13}} l_0^{b_{13}} U_0^{c_{13}} \mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{u}_f}{U_0} & \text{vitesse adimensionnelle} \\ \pi_{13} = \rho_f^{a_{13}} l_0^{b_{13}} U_0^{c_{13}} p = \frac{p}{\rho_f U_0^2} & \text{pression adimensionnelle} \\ \pi_{13} = \rho_f^{a_{13}} l_0^{b_{13}} U_0^{c_{13}} \chi = \frac{\chi}{l_0} & \text{déplacement adimensionnel} \\ \pi_{13} = \rho_f^{a_{13}} l_0^{b_{13}} U_0^{c_{13}} \sigma = \frac{\sigma}{\rho_f U_0^2} & \text{contrainte adimensionnelle} \end{array} \right.$$

On peut maintenant réécrire l'équation (3.1) pour $\pi_{13} = U^*$, le nombre adimensionnel approprié pour U :

$$U^* = f(x^*, t^*, Re, M_{flex}, C_T, \nu, Eu, D, M_{rigide}, \theta_0, h_0^*, f^*) \quad (3.2)$$

Toutefois, il faudra adapter l'analyse dimensionnelle aux différents cas que l'on rencontre. En effet, les paramètres caractérisant les phénomènes et leurs valeurs caractéristiques varient d'un cas à l'autre comme le montre le tableau 3.1. Habituellement, on considère la vitesse du fluide en entrée U_∞ comme vitesse caractéristique : $U_0 = U_{inf}$. Toutefois, dans certains cas particuliers, cette vitesse n'est plus caractéristique du problème (cas de profils autopropulsés) et peut même être nulle (notamment dans un cas de *hovering*). Ainsi, d'autres nombres adimensionnels seront plus adaptés à certains cas particuliers, comme par exemple $\vartheta = U_\infty/U_0$. Enfin, on note qu'on pose habituellement : $p_0 = \rho_f U_0^2$ et $\xi_0 = l_0$ de sorte que $Eu = 1$ et $D = 1$.

Types de structures	ρ_f	μ_f	ρ_s	E	ν	l_0	U_0	p_0	ξ_0	m	θ_0	h_0	f_0
Rigide statique	×	×				×	U_∞	$\rho_f U_0^2$					
Rigide oscillante	×	×				×	U_∞	$\rho_f U_0^2$			×	×	×
Flexible encastrée	×	×	×	×	×	×	U_∞	$\rho_f U_0^2$	l_0				
Flexible oscillante	×	×	×	×	×	×	U_∞	$\rho_f U_0^2$	l_0		×	×	×
Rigide autopropulsée	×	×				×	$f_0 l_0$	$\rho_f U_0^2$		×	×	×	×
Flexible autopropulsée	×	×	×	×	×	×	$f_0 l_0$	$\rho_f U_0^2$	l_0	×	×	×	×

Tableau 3.1 Paramètres pertinents pour différents problèmes d'IFS.

3.1.4 Cas particuliers

Structure rigide statique

C'est le cas classique d'aérodynamique sans structure. D'après le tableau 3.1, on a $(8-3) = 5$ nombres adimensionnels caractéristiques du problème. L'expression 3.2 se simplifie donc ainsi :

$$U^* = f(x^*, t^*, Re, Eu) \quad (3.3)$$

Ce type de problème est donc essentiellement caractérisé par le nombre de Reynolds.

Structure rigide oscillante

Pour un profil rigide oscillant, on obtient 8 nombres adimensionnels caractéristiques :

$$U^* = f(x^*, t^*, Re, Eu, \theta_0, h_0^*, f^*) \quad (3.4)$$

Certains auteurs préfèrent définir une fréquence adimensionnelle en tenant compte de l'amplitude de battement et remplacent la fréquence réduite f^* par le nombre de Strouhal : $St = h_0^* f^* = 2f h_0 / U_\infty$. Toutefois, le nombre de Strouhal devrait plutôt être défini grâce à la fréquence propre du fluide et non grâce à la fréquence d'oscillation du solide. C'est pourquoi on préfère l'appellation de fréquence réduite.

Structure flexible encastrée

Pour les problèmes d'IFS simples sans mouvement de corps rigide (structure flexible encastrée), 9 nombres adimensionnels caractérisent le comportement du système :

$$U^* = f(x^*, t^*, Re, M_{flex}, C_\Upsilon, \nu, Eu, D) \quad (3.5)$$

On voit ici apparaître les paramètres caractéristiques de la structure ν et D mais surtout les paramètres caractérisant le couplage IFS : M_{flex} et C_Υ . Dans certaines situations, il est intéressant de définir la vitesse réduite $U_R = U_0 / \sqrt{E/\rho_s} = \sqrt{C_\Upsilon / M_{flex}}$ qui détermine l'intensité du couplage IFS [171] : si $U_R \ll 1$: couplage faible (écoulement statique), si $U_R \approx 1$: couplage fort et si $U_R \gg 1$: couplage faible (aéroélasticité).

Structure flexible oscillante

Si on rajoute une flexibilité au profil oscillant, 4 nombres adimensionnels supplémentaires apparaissent : M_{flex} , C_Υ , ν et D . L'équation 3.2 s'écrit alors à l'aide de 11 paramètres adi-

mensionnels :

$$U^* = f(x^*, t^*, Re, M_{flex}, C_r, \nu, Eu, D, \theta_0, h_0^*, f^*) \quad (3.6)$$

Trois dynamiques différentes sont alors en interaction : celle de l'écoulement fluide U_0 , celle des oscillations du solide $f_0 l_0$ et celle des déformations de la structure $\sqrt{E/\rho_s}$. Les paramètres M_{flex} , C_r et f^* font ressortir le couplage de ces trois dynamiques. Le temps caractéristique dépend alors de la dynamique dominante du problème étudié. On suppose ici que la dynamique de l'écoulement est encore prépondérante en gardant $t^* = U_0 t / l_0$ comme échelle de temps adimensionnelle.

Structure rigide autopropulsée

Dans le cas d'un profil rigide autopropulsé, le mouvement de la structure est induit par les efforts aérodynamiques qui s'exercent sur elles. Ces efforts sont provoqués par le mouvement d'oscillation du solide ce qui crée une poussée le propulsant. La vitesse de référence n'est donc plus celle du fluide U_∞ (qui peut être nulle), mais celle du solide en mouvement. Toutefois, cette vitesse u_{mp} n'est pas un paramètre mais une nouvelle **variable dépendante**. On définit donc une vitesse caractéristique grâce à la fréquence f_0 d'oscillation du profil : $U_0 = f_0 l_0$. Ainsi, il y a un nombre adimensionnel en moins puisque $f^* = 1$ remplacé par un nouveau nombre, le rapport des vitesses $\vartheta = U_\infty / U_0$. On obtient l'expression suivante en remplaçant U_0 par $f_0 l_0$ dans les expressions des nombres adimensionnels :

$$U^* = f(x^*, \tilde{t}^*, Re, Eu, M_{rigide}, \theta_0, h_0^*, \vartheta) \quad (3.7)$$

Si la vitesse du fluide à l'infini U_∞ n'est pas nulle, on en tient compte dans la définition l'échelle de vitesses (comme si on changeait de repère) et on définit alors les vitesses adimensionnelles (pour le fluide et la masse ponctuelle) ainsi :

$$u^* = \frac{u - U_\infty}{l_0 f_0} = \frac{u}{l_0 f_0} - \vartheta \quad (3.8)$$

Le nombre de Reynolds s'exprime alors comme $Re = \frac{\rho_f f_0 l_0^2}{\mu_f}$.

Structure flexible autopropulsée

Le cas le plus général d'IFS qu'on va rencontrer dans cette étude est le problème d'un profil flexible autopropulsé. Comme on vient de le voir, on redéfinit $U_0 = f_0 l_0$ et on obtient :

$$U^* = f(x^*, \tilde{t}^*, Re, M_{flex}, C_r, \nu, Eu, D, M_{rigide}, \theta_0, h_0^*, \vartheta) \quad (3.9)$$

$$u_f^* = \frac{u_f}{l_0 f_0} - \vartheta \quad (3.10)$$

$$u_{mp}^* = \frac{u_{mp}}{l_0 f_0} - \vartheta \quad (3.11)$$

Cette analyse dimensionnelle a défini les paramètres adimensionnels caractérisant les problèmes d'interaction fluide-structure. Ceci permet une uniformisation des notations et facilite ainsi la comparaison des différentes études par similitude. L'adimensionnalisation des équations à la section 3.2.5 fera ressortir ces mêmes paramètres adimensionnels et facilitera leur résolution par le solveur numérique.

3.2 Équations

La modélisation mathématique de la physique d'un processus est un choix crucial afin que les simulations numériques soient le plus réalistes possible. Dans le cadre des interactions entre un écoulement laminaire à bas Reynolds et une structure en grand déplacement, il faut modéliser 4 sous-ensembles. Premièrement, le fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Ensuite, la structure est régie par l'équation d'équilibre de Cauchy et par les lois de comportement géométriquement non-linéaires. L'interface fluide-solide forme le troisième sous-ensemble où les équations d'équilibre doivent être vérifiées. Enfin, le déplacement de corps rigide est modélisé par une masse ponctuelle.

On rappelle que pour traiter les interactions fluide-structure, on utilise une formulation Eulerienne-Lagrangienne arbitraire (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*, ALE) permettant le couplage d'une approche *lagrangienne* pour la structure (repère non-déformé) et *eulérienne* pour l'écoulement (configuration déformée). Ainsi, contrairement au cas stationnaire, on n'aura pas besoin d'utiliser la méthode du *Lagrangien Actualisé* [109]. Les équations sont donc présentées sous la forme appropriée à l'approche ALE et les notations sont illustrées sur la figure 3.1. La formulation eulérienne sera associée à la configuration déformée dénotée par l'indice 1. La configuration non-déformée est dénotée par l'indice 0. Le lecteur intéressé pourra trouver de plus amples détails sur l'approche ALE dans l'article de Lacroix et Garon [129].

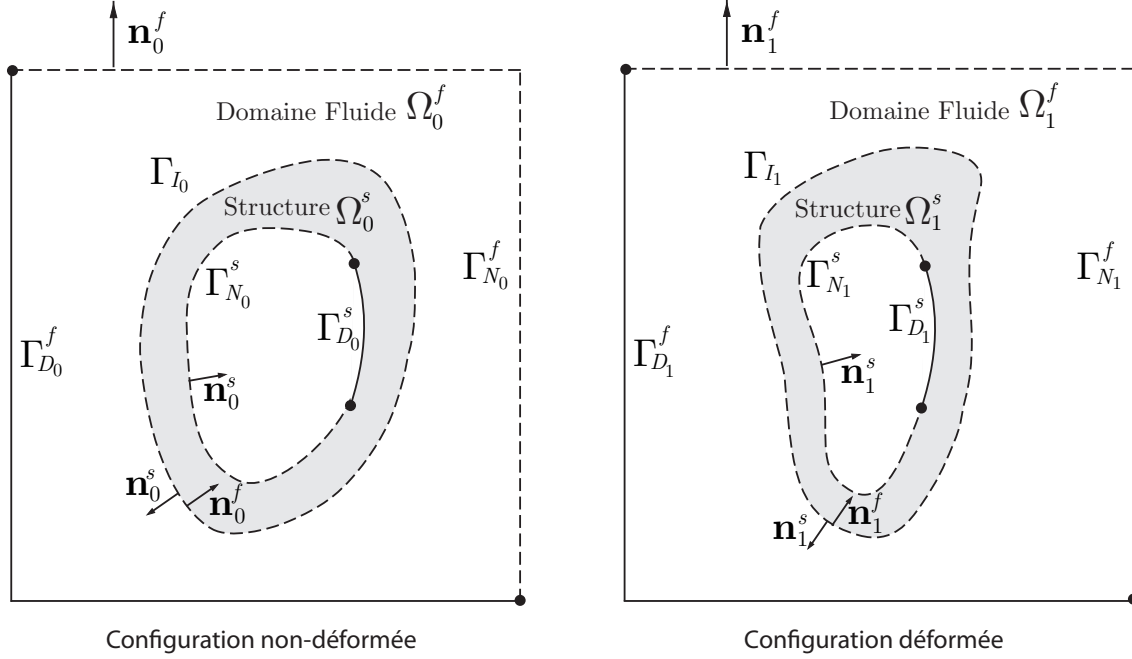


Figure 3.1 Notation du problème fluide-solide selon la configuration.

3.2.1 Équations fluides

À bas Reynolds, on peut considérer le fluide comme incompressible. L'écoulement est ainsi décrit par les équations instationnaires de Navier-Stokes : *continuité* et conservation de la *quantité de mouvement* [173]. On les écrit sous leur forme *convective* (non-conservative) dans Ω_f^1 :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0 \quad (3.12)$$

$$\rho_f \mathbf{u}_{f,t} + \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \mathbf{f}_f \quad (3.13)$$

Dans un système de coordonnées arbitraire dépendant du temps, les équations de quantité de mouvement non-conservatives (3.13) s'écrivent :

$$\rho_f \mathbf{u}_{f,t} + \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_m) \cdot \nabla \mathbf{u}_f = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \mathbf{f}_f \quad (3.14)$$

où \mathbf{u}_m est la vitesse de maille, ρ_f la densité du fluide, \mathbf{u}_f la vitesse du fluide et $\boldsymbol{\sigma}_f$ le tenseur des contraintes fluides (incluant pression et forces visqueuses). Les équations (3.12) et (3.13) sont exprimées dans un système de coordonnées *Eulérien* alors que l'équation (3.14) est une formulation d'Eulérienne-Lagrangienne arbitraire (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*, ALE). En

supposant que le fluide est Newtonien, sa loi de comportement est donnée par :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_f &= \boldsymbol{\tau}_f - p\mathbf{I} \\ &= \mu_f[\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T] - p\mathbf{I}\end{aligned}\tag{3.15}$$

où μ_f est la viscosité dynamique et p la pression du fluide.

Les équations fluides sont mathématiquement fermées par les conditions frontières suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}_f = \bar{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur } \Gamma_N^f \tag{3.16}$$

$$\mathbf{u}_f = \bar{\mathbf{u}}_f \quad \text{sur } \Gamma_D^f \tag{3.17}$$

où Γ_N^f représente une frontière du fluide où des conditions de *Neumann* s'appliquent sous la forme de forces surfaciques (de tractions) $\bar{\mathbf{t}}_f$, et Γ_D^f correspond à une frontière de *Dirichlet* sur laquelle la vitesse, $\bar{\mathbf{u}}_f$, est imposée.

3.2.2 Équations structurelles

Le comportement de la structure est régi par les équations différentielles d'équilibre de Cauchy exprimées sur la configuration initiale non-déformée par une formulation de *Lagrangien Total* dans Ω_s^0 :

$$\rho_s \mathbf{u}_{s,t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_l + \mathbf{f}_s = 0 \tag{3.18}$$

$$\mathbf{u}_s = \boldsymbol{\chi}_{s,t} \tag{3.19}$$

avec ρ_s la densité du solide, \mathbf{u}_s la vitesse solide, $\boldsymbol{\chi}_s$ la déformation solide et \mathbf{f}_s le champ de forces volumiques dans le solide.

Afin de modéliser les grands déplacements de la structure (non-linéarités géométriques), on considère une structure de Saint-Venant Kirchhoff dont la loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_l = \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma}_k \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma}_k = \lambda_s \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu_s \mathbf{E} \tag{3.20}$$

où λ_s et μ_s sont les constantes de Lamé telles que :

$$\lambda_s = Eg_1(\nu) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu_s = Eg_2(\nu) = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \boldsymbol{\chi}_s$ le gradient de la transformation et \mathbf{E} le tenseur de déformations non-linéaire

de Green-Lagrange s'écrivant :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\nabla \chi_s + \nabla^T \chi_s + \nabla^T \chi_s \nabla \chi_s)$$

où le dernier terme fait ressortir les non-linéarités quadratiques géométriques.

Les équations 3.18 et 3.19 sont complétées par les conditions aux limites suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}_l \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_s \quad \text{sur } \Gamma_N^s \quad (3.21)$$

$$\chi_s = \overline{\chi_s} \quad \text{sur } \Gamma_D^s \quad (3.22)$$

Pour plus d'informations sur les modèles structuraux et leurs lois de comportement en grands déplacements, on réfère le lecteur au chapitre II de notre précédent travail de maîtrise [109].

3.2.3 Interface fluide-structure

L'interaction entre le fluide et la structure passe physiquement par leur interface conjointe. La modélisation de cette interface va donc assurer le couplage fluide-structure grâce aux équations de continuité suivantes pour la vitesse, les efforts et les déplacements :

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_s \quad \text{non-glissement sur } \Gamma_{I_1} \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \hat{\mathbf{n}}_s + \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}_f = 0 \quad \text{équilibre des contraintes sur } \Gamma_{I_1} \quad (3.24)$$

$$\chi_f = \chi_s \quad \text{continuité des déplacements sur } \Gamma_{I_0} \quad (3.25)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_f$ est le tenseur habituel des contraintes fluides et $\boldsymbol{\sigma}_c$ est le tenseur de Cauchy exprimant les contraintes solides en configuration déformée :

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \frac{\mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{F}^T}{J} \quad (3.26)$$

où $J = \det(\mathbf{F})$.

On précisera dans la section 3.3 concernant la déformation de maillage la définition du déplacement fluide χ_f sur l'interface non-déformée Γ_{I_0} .

3.2.4 Équations de la masse ponctuelle

Lorsqu'on veut simuler un mouvement libre de corps rigide en réponse aux forces aérodynamiques $\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{aero}$ agissant sur ses frontières, on modélise le solide par une masse ponctuelle dont la dynamique est régie simplement par la seconde loi du mouvement de

Newton :

$$m\mathbf{u}_{mp,t} = \mathbf{f}_{ext} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u}_{mp} = \boldsymbol{\chi}_{mp,t} \quad (3.28)$$

où m est la masse du solide, \mathbf{u}_{mp} sa vitesse et $\boldsymbol{\chi}_{mp}$ son déplacement.

Si on impose un mouvement forcé aux frontières du solide, celui-ci se superpose au mouvement libre de corps rigide comme décrit à la section 4.4.1. En outre, dans le cas où le solide est en partie flexible, on modélise la partie rigide par une masse ponctuelle alors que la partie flexible est régie par les équations 3.20. La force s'exerçant sur la masse ponctuelle provient alors en partie de la structure de sorte qu'on remplace la force dans l'équation 3.27 par $\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{aero} + \mathbf{f}_{solide}$. Le mouvement de la partie rigide est alors transmis à la partie flexible implicitement, tout comme pour une interface fluide-structure simplifiée (vitesse et déplacement uniformes sur l'interface).

Ainsi, sur les interfaces entre la masse ponctuelle et le fluide Γ_{I_f} et entre la masse ponctuelle et le solide Γ_{I_s} , on peut écrire :

$$\mathbf{f}_{ext} = \int_{\Gamma_{I_f}} \sigma_l \cdot \hat{n}_f d\Gamma + \int_{\Gamma_{I_s}} \sigma_c \cdot \hat{n}_s d\Gamma \quad (3.29)$$

Ces deux intégrales sont considérées comme des variables *secondaires* et seront calculées implicitement par la méthode des réactions (voir section 3.5).

3.2.5 Adimensionalisation des équations

Suite à l'analyse dimensionnelle de la section 3.1, on a fait ressortir les paramètres caractéristiques des différents problèmes d'interaction fluide-structure que l'on se propose d'étudier. Il est donc intéressant de procéder à l'adimensionalisation des équations présentées pour faire directement intervenir ces paramètres caractéristiques. En outre, cette démarche est parfois même nécessaire pour des raisons numériques. En effet, sans ce préconditionneur naturel, les ordres de grandeurs des coefficients peuvent être trop éloignés et ainsi empêcher le solveur de converger.

On montre que les équations adimensionnelles se déduisent des équations dimensionnelles par simple composition linéaire quelque soit le cas étudié. En annotant d'un astérisque (*) les valeurs adimensionnelles, le système global adimensionné s'écrit ainsi sous la forme générale

suivante :

$$\begin{aligned}
\text{eq. 3.12} \cdot \frac{l_0}{U_0} : \quad & \nabla \cdot \mathbf{u}_f^* = 0 \\
\text{eq. 3.13} \cdot \frac{l_0}{\rho_f U_0^2} : \quad & \rho_f^* \mathbf{u}_{f,t^*}^* + \rho_f^* (\mathbf{u}_f^* - \mathbf{u}_m^*) \cdot \nabla \mathbf{u}_f^* = -\nabla p^* + \mu_f^* \nabla \cdot \zeta (\mathbf{u}_f^*) + \mathbf{f}_f^* \\
\text{eq. 3.16} \cdot \frac{1}{\rho_f U_0^2} : \quad & (\mu_f^* \zeta (\mathbf{u}_f^*) - p^* \mathbf{I}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f = \bar{\mathbf{t}}_f^* \quad \text{sur } \Gamma_N^f \\
\text{eq. 3.17} \cdot \frac{1}{U_0} : \quad & \mathbf{u}_f^* = \bar{\mathbf{u}}_f^* \quad \text{sur } \Gamma_D^f \\
\\
\text{eq. 3.18} \cdot \frac{l_0}{\rho_f U_0^2} : \quad & \rho_s^* \mathbf{u}_{s,t^*}^* + \nabla \cdot (\mathbf{F} [\lambda_s^* \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu_s^* \mathbf{E}]) + \mathbf{f}_s^* = 0 \\
\text{eq. 3.19} \cdot \frac{1}{U_0} : \quad & \mathbf{u}_s^* = \chi_{s,t^*}^* \\
\text{eq. 3.21} \cdot \frac{1}{\rho_f U_0^2} : \quad & (\mathbf{F} [\lambda_s^* \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu_s^* \mathbf{E}]) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_s^* \quad \text{sur } \Gamma_N^s \\
\text{eq. 3.22} \cdot \frac{1}{l_0} : \quad & \chi_s^* = \bar{\chi}_s^* \quad \text{sur } \Gamma_D^s \\
\\
\text{eq. 3.23} \cdot \frac{1}{U_0} : \quad & \mathbf{u}_f^* = \mathbf{u}_s^* \quad \text{sur } \Gamma_{I_1} \\
\text{eq. 3.24} \cdot \frac{1}{\rho_f U_0^2} : \quad & \frac{\mathbf{F} [\lambda_s^* \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu_s^* \mathbf{E}] \mathbf{F}^T}{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = -(\mu_f^* \zeta (\mathbf{u}_f^*) - p^* \mathbf{I}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f \quad \text{sur } \Gamma_{I_1} \\
\text{eq. 3.25} \cdot \frac{1}{l_0} : \quad & \chi_f^* = \chi_s^* \quad \text{sur } \Gamma_{I_0} \\
\\
\text{eq. 3.27} \cdot \frac{l_0}{\rho_f U_0^2} : \quad & m^* \mathbf{u}_{mp,t^*}^* = \mathbf{f}_{ext}^* \\
\text{eq. 3.28} \cdot \frac{1}{U_0} : \quad & \mathbf{u}_{mp}^* = \chi_{mp,t^*}^*
\end{aligned}$$

où $\zeta (\mathbf{u}_f^*) = [\nabla \mathbf{u}_f^* + (\nabla \mathbf{u}_f^*)^T]$. De plus, par définition \mathbf{F} , \mathbf{E} et J sont déjà des grandeurs adimensionnées. Enfin, pour éviter de surcharger les notations, on note également ∇ le gradient adimensionnalisé $\nabla^* = l_0 \nabla$ et

$$\mathbf{u}_{f,t^*}^* = \frac{\partial \mathbf{u}_f^*}{\partial t^*} = t_0 \frac{\partial \mathbf{u}_f^*}{\partial t} = t_0 \mathbf{u}_{f,t}^*$$

On note alors que deux problèmes seront similaires s'il y a similitude géométrique et si les coefficients du système d'équations à résoudre sont égaux. Les définitions de ces coefficients dépendent des cas étudiés et des paramètres caractéristiques associés. La similarité totale entre deux problèmes géométriquement similaires sera donc vérifiée lorsque leurs paramètres caractéristiques (nombres adimensionnels définis à la section 3.1) seront égaux. Enfin, on suppose dans la présente étude des forces extérieures nulles : $\mathbf{f}_s^* = \mathbf{f}_s = 0, \mathbf{f}_s^* = \mathbf{f}_s = 0$.

Dans la suite, on développe l'adimensionnalisation de chaque équation afin de faire apparaître les paramètres caractéristiques des problèmes d'interactions fluide-structure. Afin de se placer dans un domaine espace-temps adimensionnalisé, on pose :

$$x^* = x/l_0 \quad (3.30)$$

$$t^* = t/t_0 = tU_0/l_0 \quad (3.31)$$

Dans la présente étude, on considère la corde du profil comme longueur caractéristique $l_0 = c$. En outre, on définit habituellement la vitesse du fluide en entrée comme la vitesse caractéristique $U_0 = U_\infty$. Toutefois, dans certains cas, il est intéressant de définir la vitesse caractéristique d'une manière plus appropriée. Ainsi, on note qu'en posant $U_0 = f_0 l_0$ dans le cas d'un profil autopropulsé, on obtient une échelle de temps plus adaptée : $\tilde{t}^* = f_0 t$. En effet, l'échelle de temps propre au solide paraît plus adéquate que celle du fluide pour étudier la physique de propulsion profil oscillant (surtout si $U_\infty = 0$).

Équations fluides

Afin d'adimensionnaliser les équations fluides, on pose :

$$\mathbf{u}_f^* = \mathbf{u}_f/U_0 \quad (3.32)$$

$$p^* = p/p_0 \quad (3.33)$$

$$p_0 = \rho_f U_0^2 \quad (\text{ainsi } \text{Eu}=1) \quad (3.34)$$

$$\mathbf{f}_f^* = l_0 \mathbf{f}_f / (\rho_f U_0^2) \quad (3.35)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_f^* = \bar{\mathbf{t}}_f / (\rho_f U_0^2) \quad (3.36)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_f^* = \bar{\mathbf{u}}_f / U_0 \quad (3.37)$$

L'équation de continuité 3.12 adimensionnalisée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{l_0}{U_0} \right) \nabla \cdot \mathbf{u}_f &= 0 \\ l_0 \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_f}{U_0} \right) &= 0 \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}_f^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

et l'équation de quantité de mouvement 3.14 s'adimensionnalise comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{l_0}{\rho_f U_0^2} \left[\rho_f \mathbf{u}_{f,t} + \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_m) \cdot \nabla \mathbf{u}_f \right] &= -\nabla p + \mu_f \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T] + \mathbf{f}_f \\
\frac{l_0}{U_0} \frac{\mathbf{u}_{f,t}}{U_0} + \left(\frac{\mathbf{u}_f}{U_0} - \frac{\mathbf{u}_m}{U_0} \right) \cdot (l_0 \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}_f}{U_0} \right) &= -l_0 \nabla \left(\frac{p}{\rho_f U_0^2} \right) \\
&+ \frac{\mu_f}{l_0 \rho_f U_0} l_0 \nabla \cdot \left[l_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{u}_f}{U_0} \right) + (l_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{u}_f}{U_0} \right))^T \right] \\
&+ \frac{l_0}{\rho_f U_0^2} \mathbf{f}_f \\
\mathbf{u}_{f,t}^* + (\mathbf{u}_f^* - \mathbf{u}_m^*) \cdot \nabla^* \mathbf{u}_f^* &= -\nabla^* p^* \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \nabla^* \cdot [\nabla^* \mathbf{u}_f^* + (\nabla^* \mathbf{u}_f^*)^T] + \mathbf{f}_f^* \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Ainsi les équations dimensionnelles et adimensionnelles sont reliées par la composition linéaire utilisant :

$$\rho_f^* = 1. \tag{3.40}$$

$$\mu_f^* = \frac{1}{\text{Re}} \tag{3.41}$$

Concernant les équations aux frontières 3.16 et 3.17, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_f U_0^2} \left((\mu_f [\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T] - p \mathbf{I}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f \right) &= \bar{\mathbf{t}}_f \\
\left(\frac{\mu_f l_0}{l_0 \rho_f U_0^2} [\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T] - \frac{1}{\rho_f U_0^2} p \mathbf{I} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f &= \frac{1}{\rho_f U_0^2} \bar{\mathbf{t}}_f \\
\left(\frac{1}{\text{Re}} [\nabla^* \mathbf{u}_f^* + (\nabla^* \mathbf{u}_f^*)^T] - p^* \mathbf{I} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f &= \bar{\mathbf{t}}_f^* \quad \text{sur } \Gamma_N^f \tag{3.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{U_0} (\mathbf{u}_f &= \bar{\mathbf{u}}_f) \\
\mathbf{u}_f^* &= \bar{\mathbf{u}}_f^* \quad \text{sur } \Gamma_D^f \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Dans les cas étudiés, on considère des contraintes nulles (condition libre) sur les frontières de type Neumann : $\bar{\mathbf{t}}_f^* = \bar{\mathbf{t}}_f = 0$. Sur les frontières de type Dirichlet, on impose habituellement $U_0 = U_\infty$ en entrée et des vitesses nulles ailleurs. Ainsi, on a dans tous les cas $\bar{\mathbf{u}}_f^* = 1$ en entrée et $\bar{\mathbf{u}}_f^* = 0$ sur les autres frontières de Dirichlet.

Remarque : dans le cas où la vitesse caractéristique du problème U_0 est différente de la vitesse d'entrée U_∞ (par exemple profil oscillant autopropulsé), il faut faire attention au fait

qu'il y a un paramètre de similarité supplémentaire sur la frontière :

$$\vartheta = \frac{U_\infty}{U_0} \quad (3.44)$$

Équations solides

On procède de la même manière avec les équations solides en posant en plus :

$$\mathbf{u}_s^* = \mathbf{u}_s / U_0 \quad (3.45)$$

$$\boldsymbol{\chi}_s^* = \boldsymbol{\chi}_s / l_0 \quad (\text{on suppose } D = 1) \quad (3.46)$$

$$\mathbf{f}_s^* = l_0 \mathbf{f}_s / (\rho_f U_0^2) \quad (3.47)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_s^* = \bar{\mathbf{t}}_s / (\rho_f U_0^2) \quad (3.48)$$

$$\bar{\boldsymbol{\chi}}_s^* = \bar{\boldsymbol{\chi}}_s / l_0 \quad (3.49)$$

L'équation 3.19 s'adimensionalise directement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{U_0} \mathbf{u}_s &= \frac{1}{U_0} \frac{l_0}{l_0} \boldsymbol{\chi}_{s,t} \\ \mathbf{u}_s^* &= \boldsymbol{\chi}_{s,t}^* \end{aligned} \quad (3.50)$$

Pour l'équation de Cauchy 3.18 en utilisant :

$$\lambda_s = E g_1(\nu) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu_s = E g_2(\nu) = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{l_0}{\rho_f U_0^2} \left(\rho_s \mathbf{u}_{s,t} + \nabla \cdot (\mathbf{F} [\lambda_s \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu_s \mathbf{E}]) + \mathbf{f}_s \right) = 0 \\ & \frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{l_0}{U_0} \frac{\mathbf{u}_{s,t}}{U_0} + \frac{1}{\rho_f U_0^2} \nabla^* \cdot (\mathbf{F} [\lambda_s \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu_s \mathbf{E}]) + \frac{l_0}{\rho_f U_0^2} \mathbf{f}_s = 0 \\ & M_{flex} \mathbf{u}_{s,t}^* + \nabla^* \cdot \left(\mathbf{F} \left[\frac{E g_1(\nu)}{\rho_f U_0^2} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2 \frac{E g_2(\nu)}{\rho_f U_0^2} \mathbf{E} \right] \right) + \mathbf{f}_s^* = 0 \\ & M_{flex} \mathbf{u}_{s,t}^* + \nabla^* \cdot \left(\mathbf{F} \left[\frac{g_1(\nu)}{C_R} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2 \frac{g_2(\nu)}{C_R} \mathbf{E} \right] \right) + \mathbf{f}_s^* = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ainsi on passe des équations dimensionnelles aux équations adimensionnelles en utilisant :

$$\rho_s^* = M_{flex} \quad (3.52)$$

$$\lambda_s^* = \frac{g_1(\nu)}{C_r} = \frac{1}{C_r} \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.53)$$

$$\mu_s^* = \frac{g_2(\nu)}{C_r} = \frac{1}{C_r} \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (3.54)$$

En divisant les équations 3.21 par $(\rho_f U_0^2)$ et 3.22 par l_0 on obtient les conditions aux limites adimensionnelles pour la structure :

$$\left(\mathbf{F} \left[\frac{g_1(\nu)}{C_r} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2 \frac{g_2(\nu)}{C_r} \mathbf{E} \right] \right) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_s^* \quad \text{sur } \Gamma_N^s \quad (3.55)$$

$$\chi_s^* = \overline{\chi_s^*} \quad \text{sur } \Gamma_D^s \quad (3.56)$$

À l'exception des efforts du fluide à l'interface, la structure n'est pas soumise à d'autres contraintes dans la présente étude. Ainsi, $\bar{\mathbf{t}}_s^* = \bar{\mathbf{t}}_s = 0$. Par contre, on peut imposer un mouvement à la structure sur sa frontière non-mouillée par des conditions de Dirichlet.

Dans le cas d'un profil oscillant, ce mouvement est décrit par les équations présentées à la section 2.1.2 :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_{av} + \theta_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi) & \text{rotation} \\ h(t) = h_0 \sin(2\pi f_0 t) & \text{battement} \end{cases}$$

On impose ainsi à chaque point de la frontière de coordonnées initiales (x_e, y_e) les conditions suivantes :

$$\bar{\chi}_s(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Ainsi en divisant par l_0 on obtient :

$$\bar{\chi}_s^*(t^*) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t^*)) & -\sin(\theta(t^*)) \\ \sin(\theta(t^*)) & \cos(\theta(t^*)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e^* \\ y_e^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h^*(t^*) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

avec :

$$\theta(t^*) = \theta_{av} + \theta_0 \sin \left(2\pi f_0 \frac{l_0}{U_0} t^* + \phi \right) = \theta_{av} + \theta_0 \sin (2\pi f^* t^* + \phi) \quad (3.59)$$

$$h^*(t^*) = h_0^* \sin \left(2\pi f_0 \frac{l_0}{U_0} t^* \right) = h_0^* \sin (2\pi f^* t^*) \quad (3.60)$$

On observe alors que les conditions aux limites de Dirichlet seront similaires si et seulement si on a égalité des grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\theta_{av} = 0 \quad \text{dans les cas étudiés} \quad (3.61)$$

$$\theta_0 = \theta_0 \quad (3.62)$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{dans les cas étudiés} \quad (3.63)$$

$$f^* = \frac{l_0 f_0}{U_0} \quad (3.64)$$

$$h_0^* = \frac{h_0}{l_0} \quad (3.65)$$

Équations d'interface

Pour adimensionnaliser les équations d'interface, il est très important de s'assurer de la compatibilité avec les équations fluides et structurales adimensionnalisées. Comme on a procédé de façon similaire pour les équations du fluide et de la structure, on en déduit facilement les équations adimensionnelles suivantes en divisant respectivement les équations par U_0 , $\rho_f U_0^2$ et l_0 :

$$\mathbf{u}_f^* = \mathbf{u}_s^* \quad \text{sur } \Gamma_{I_1} \quad (3.66)$$

$$\frac{\mathbf{F} \left[\frac{g_1(\nu)}{C_R} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2 \frac{g_2(\nu)}{C_R} \mathbf{E} \right] \mathbf{F}^T}{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = - \left(\frac{1}{\text{Re}} \zeta(\mathbf{u}_f^*) - p^* \mathbf{I} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f \quad \Gamma_{I_1} \quad (3.67)$$

$$\boldsymbol{\chi}_f^* = \boldsymbol{\chi}_s^* \quad \text{sur } \Gamma_{I_0} \quad (3.68)$$

La composition linéaire pour passer aux équations d'interface adimensionnelles se fait avec les coefficients suivantes :

$$\mu_f^* = \frac{1}{\text{Re}} \quad (3.69)$$

$$\lambda_s^* = \frac{g_1(\nu)}{C_R} = \frac{1}{C_R} \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.70)$$

$$\mu_s^* = \frac{g_2(\nu)}{C_R} = \frac{1}{C_R} \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (3.71)$$

Notons que dans le cas d'un profil oscillant rigide (sans équations structurelles), les équations d'interface se résument à des conditions de type Dirichlet afin d'imposer le mouvement sur l'interface-frontière :

$$\mathbf{u}_f^* = \bar{\mathbf{u}}_s^* \quad \text{sur } \Gamma_{ID} \quad (3.72)$$

$$\chi_f^* = \bar{\chi}_s^* \quad \text{sur } \Gamma_{ID} \quad (3.73)$$

Le mouvement adimensionné $\bar{\chi}_s^*$ est alors défini par l'équation 3.58 et la vitesse $\bar{\mathbf{u}}_s^*$ par l'équation suivante obtenue de la même manière en divisant par U_0 :

$$\bar{\mathbf{u}}_s^*(t^*) = \theta(t^*)_{,t^*} \begin{bmatrix} \sin(\theta(t^*)) & \cos(\theta(t^*)) \\ \cos(\theta(t^*)) & -\sin(\theta(t^*)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e^* \\ y_e^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h^*(t^*)_{,t^*} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Ces conditions seront alors similaires si les grandeurs adimensionnelles suivantes sont conservées :

$$\theta_0 = \theta_0 \quad (3.75)$$

$$f^* = \frac{l_0 f_0}{U_0} \quad (3.76)$$

$$h_0^* = \frac{h_0}{l_0} \quad (3.77)$$

Équations de la masse ponctuelle

Enfin, en posant :

$$\mathbf{u}_{mp}^* = \mathbf{u}_{mp}/U_0 \quad (3.78)$$

$$\chi_{mp}^* = \chi_{mp}/l_0 \quad (3.79)$$

$$\mathbf{f}_{ext}^* = \mathbf{f}_{ext}/(\rho_f l_0^2 U_0^2) \quad (3.80)$$

$$(3.81)$$

les équations de la masse ponctuelle s'adimensionnalisent simplement en divisant l'équation 3.27 par $(\rho_f l_0^2 U_0^2)$ et l'équation 3.28 par U_0 :

$$M_{rigide} \mathbf{u}_{mp,t^*}^* = \mathbf{f}_{ext}^* \quad (3.82)$$

$$\mathbf{u}_{mp}^* = \chi_{mp,t^*}^* \quad (3.83)$$

Les problèmes impliquant une masse ponctuelles seront alors similaires si le nombre de

masse est conservé :

$$m^* = M_{rigide} = \frac{m}{\rho_f l_0^3} \quad (3.84)$$

On note que cette adimensionnalisation est compatible avec l'équation 3.29 qui devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ext}^* &= \int_{\Gamma_{I_f}} \frac{\sigma_l}{\rho_f U_0^2} \cdot \hat{n}_f \frac{d\Gamma}{l_0^2} + \int_{\Gamma_{I_s}} \frac{\sigma_c}{\rho_f U_0^2} \cdot \hat{n}_s \frac{d\Gamma}{l_0^2} \\ &= \int_{\Gamma_{I_f}} \sigma_l^* \cdot \hat{n}_f d\Gamma^* + \int_{\Gamma_{I_s}} \sigma_c^* \cdot \hat{n}_s d\Gamma^* \end{aligned} \quad (3.85)$$

Similitude des problèmes

L'adimensionnalisation des équations confirme l'analyse dimensionnelle des problèmes d'interaction fluide-structure et on retrouve les paramètres adimensionnels comme coefficients de similarité. Le tableau 3.2 résume les nombres adimensionnels caractéristiques, selon le type de structures étudiée.

Types de structures	Re	M_{flex}	C_{Υ}	ν	M_{rigide}	θ_0	h_0^*	f^*	ϑ
Rigide statique	×	-	-	-	-	-	-	-	1.
Rigide oscillante	×	-	-	-	-	×	×	×	1.
Flexible encastrée	×	×	×	×	-	-	-	-	1.
Flexible oscillante	×	×	×	×	-	×	×	×	1.
Rigide autopropulsée	×	-	-	-	×	×	×	1.	×
Flexible autopropulsée	×	×	×	×	×	×	×	1.	×

Tableau 3.2 Nombres adimensionnels caractéristiques de similitude pour différents problèmes d'IFS.

3.3 Déformation du domaine fluide

Lorsqu'on étudie les interactions fluide-structure, on remarque que l'approche ALE rend incompatibles les deux formulations utilisées pour le fluide (eulérienne) et le solide (lagrangienne). En effet, lors de la résolution, les déformations du solide ou les mouvements d'une frontière fluide nécessitent la déformation du domaine fluide à chaque pas de temps. Or, dans une approche eulérienne ceci est impossible car le volume de contrôle est fixe. On doit donc déformer la partie fluide pour rendre les deux formulations compatibles à l'aide d'une

approche pseudo-solide [121]. L'approche pseudo-solide classique décrite dans la première section utilise des équations d'élasticité linéaire qui permet de déformer correctement le domaine fluide dans la plupart des problèmes d'interaction fluide-structure [174]. Toutefois, pour de très grands déplacements, on doit adapter cette méthode, soit en utilisant un zonage du domaine comme exposé dans la seconde partie, soit en utilisant des équations non-linéaires comme présentée dans la troisième section.

3.3.1 Approche pseudo-solide

Afin de déformer le domaine fluide selon les mouvements et les déformations solides, l'approche pseudo-solide identifie le domaine fluide à une structure élastique. Dans l'approche classique, la déformation du maillage $\chi_f = \chi_{ps}$ est alors régie par les équations habituelles d'élasticité linéaire stationnaires. Ainsi, à chaque pas de temps, la forme du domaine fluide épouse la nouvelle géométrie solide. En utilisant une forme linéaire du tenseur de Green-Lagrange \mathbf{E}_{ps} et une loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff, on obtient les équations d'élasticité linéaire suivantes :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_l^{ps} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0^f \quad (3.86)$$

$$\text{avec : } \boldsymbol{\sigma}_l^{ps} = \boldsymbol{\sigma}_k^{ps} = \lambda_{ps} \text{tr}(\mathbf{E}_{ps}) \mathbf{I} + 2\mu_{ps} \mathbf{E}_{ps} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{E}_{ps} = \frac{1}{2} (\nabla \chi_{ps} + \nabla^T \chi_{ps}) \quad (3.88)$$

où γ_{ps} et μ_{ps} sont les coefficients de Lamé propres au pseudo-solide. Ils peuvent alors être considérés comme unitaires partout dans le domaine fluide ou alors être adaptés dans les zones de grands déplacements (proche des frontières en mouvement et interfaces) afin d'éviter des déformations néfastes des mailles. En pratique, on augmente le module d'Young localement des éléments concernés afin de prévenir des déformations trop importantes menant au repliement du maillage.

L'équation d'équilibre de Cauchy pour le pseudo-solide est complétée par les conditions aux frontières suivantes :

$$\chi_{ps} = \bar{\chi}_{ps} \quad \text{sur } \Gamma_{D_0}^{ps} - \Gamma_{I_0} \quad (3.89)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_l^{ps} \cdot \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_{ps} \quad \text{sur } \Gamma_{N_0}^{ps} - \Gamma_{I_0} \quad (3.90)$$

où $\bar{\chi}_{ps}$ et $\bar{\mathbf{t}}_{ps}$ sont respectivement les déplacements et les forces imposés au pseudo-solide.

Sur l'interface fluide-solide, l'équation de continuité des déplacements présentée à la sec-

tion 3.2.3 prends alors tout son sens :

$$\chi_f = \chi_{ps} = \chi_s \quad \text{sur } \Gamma_{I_0} \quad (3.91)$$

On note alors qu'on n'impose pas la continuité des contraintes à l'interface entre le solide et le pseudo-solide. Ceci permet au pseudo-solide de se déformer librement tout en n'offrant aucune résistance au déplacement du solide. Il ne s'agit en fait que d'un artifice de calcul qui n'influence pas la physique du problème. En outre, cela permet un libre choix de lois de comportement du pseudo-solide (on pourrait considérer une loi non-linéaire).

3.3.2 Zonage du maillage

L'approche pseudo-solide classique permet de traiter de grands déplacements de la structure. Toutefois, pour des amplitudes extrêmes, il peut être avantageux de faire un zonage du domaine et d'imposer le déplacement des frontières de certaines zones. On ne parle donc pas ici des grandes déformations liées aux structures flexibles mais plutôt des grands mouvements de corps rigides (rotations et translations) imposés aux frontières solides. Un profil rigide oscillant est un excellent exemple.

Ainsi, pour de très grandes amplitudes de rotation (i.e. $\theta_0 > 70^\circ$), on peut introduire une zone pseudo-solide circulaire autour du profil (maillage plus clair sur la figure 3.2) qui est l'aire d'intérêt. On impose à ses frontières le même mouvement que celui du profil de sorte que l'ensemble du maillage de cette zone subisse un mouvement de corps rigide. Ainsi, les mailles autour du profil rigide ne se déforment pas. A l'extérieur du disque, la deuxième zone pseudo-solide se déforme plus facilement puisque les mailles sont de plus grandes tailles comme le montre la figure 3.2 ce qui empêche le repliement. Certes, la qualité du maillage est alors moindre dans cette zone mais, se trouvant à l'extérieur du domaine qui nous intéresse le plus, l'impact négatif sur les résultats est réduit.

L'utilisation d'une approche pseudo-solide facilite grandement le zonage du domaine de calcul. Il n'y a aucune modification à effectuer aux frontières des zones puisqu'on applique simplement des conditions de non-glissement. Ainsi, les différentes zones fluides sont traitées implicitement comme un seul domaine fluide. Les nœuds de calcul sur les frontières ne sont donc pas dédoublés et appartiennent aux zones de part et d'autre de l'interface fluide-fluide. Il n'est donc pas nécessaire de faire glisser le maillage ou de s'occuper des conditions d'interfaces, tout ceci est implicite. Bien entendu, si les mouvements relatifs entre deux zones sont trop importants le maillage va se déchirer et il faudra alors songer à utiliser des techniques de remaillage en parallèle. Une approche adaptative permettrait d'utiliser en majeure partie un pseudo-solide pour déformer le maillage et de remailler le domaine lorsque les mouvements

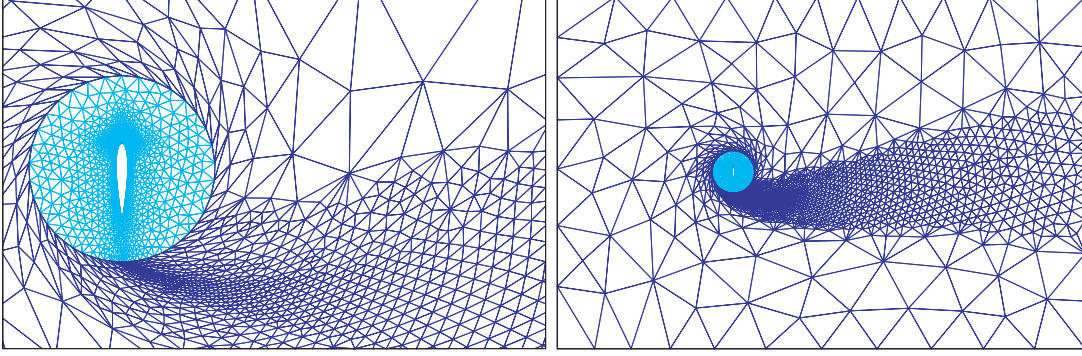


Figure 3.2 Maillage déformé pour un angle de rotation $\theta_0 = 90^\circ$.

des frontières sont trop importants.

3.3.3 Approche non-linéaire

L'approche pseudo-solide classique possède l'avantage majeur d'être linéaire et donc peu coûteuse. Toutefois, dans le cadre des problèmes d'IFS en grands déplacements, il existe deux grandes limitations. Premièrement, comme on l'a vu, on doit adapter les propriétés du pseudo-solide afin de gérer au mieux la déformation du maillage. Mais cette technique n'est pas automatique ni évolutive. On doit en effet définir par "expérience" les zones (du domaine non-déformé) où le risque de déformation du maillage est le plus élevé. Il n'y a donc aucun critère objectif concernant la qualité du maillage. De plus, cette approche ne s'adapte pas bien aux problèmes instationnaires où les zones de grandes déformations varient avec le temps, pouvant passer d'une forte compression à un fort étirement. La deuxième limitation est directement liée à la nature linéaire de l'approche restreignant les déformations du pseudo-solide à sa zone "élastique" sous peine de repliement lorsque les "contraintes" (dues aux grands déplacements) sont trop fortes.

On propose deux adaptations de la méthode classique afin d'éliminer ces deux limitations. Tout d'abord, en développant une approche automatisée évolutive non-linéaire utilisant des critères de qualité pour le maillage. Ensuite, en linéarisant cette approche pour tenter de réduire les coûts de calcul dus à la non-linéarité des équations précédents.

A. Équations non-linéaires

Afin d'obtenir une approche automatique et évolutive, on adapte l'approche classique en ajoutant un critère sur la qualité du maillage. En pratique, on adapte le module d'Young local d'un élément grâce à une fonction f dont l'argument est un critère de qualité C_q au

temps t :

$$E_{local}(t) = E_{local}(0) f(C_q(t)) \quad (3.92)$$

Ce critère supplémentaire doit empêcher une trop forte déformation des éléments de manière automatique (on ne cherche pas ici à évaluer la forme optimal de l'élément en fonction de la solution à obtenir). Dans leur rapport, Duval et Guillard [175] définissent un critère de qualité géométrique pour les éléments triangulaire afin de localiser les éléments présentant une déformation importante. C'est le rapport entre les rayons des cercles inscrit r et circonscrit R à chaque élément :

$$C_{geo}(t) = \frac{r(t)}{R(t)}$$

Selon ce critère, l'élément optimal est le triangle équilatéral avec $C_q = 1/2$. Un élément très déformé sera alors caractérisé par un C_q tendant vers 0. Les auteurs adoptent toutefois une stratégie de remaillage (global puis local) qu'on tente d'éviter ici car trop coûteuse dans le cadre de simulations instationnaires.

On va utiliser ce critère en considérant que le maillage non-déformé a une bonne qualité géométrique. On veut donc au moins préserver la qualité de chaque maille malgré les déformations. On pose alors :

$$E_{local}(t) = E_{local}(0) f(C_q(t)) = E_{local}(0) \frac{C_{geo}(0)}{C_{geo}(t)}$$

Ainsi, si $C_{geo}(t) = C_{geo}(0)$, le module d'Young reste inchangé, si $C_{geo}(t) \rightarrow 0$, E augmente pour diminuer la déformation et enfin si $C_{geo}(t) \rightarrow 1/2$, E diminue de manière à ce que la maille puisse tendre vers un triangle équilatéral. Si en outre on pose : $E_{local}(0) = 1/C_{geo}(0)$, on obtient :

$$E_{local}(t) = \frac{1}{C_{geo}(t)}$$

Comme C_q dépend de la déformation au temps t , cette méthodologie rend l'approche non-linéaire mais automatique, plus besoin de spécifier le module d'Young des éléments, et évolutive, plus l'élément se déforme et plus son module d'Young augmente, empêchant les repliements du domaine fluide sur lui-même.

B. Équations linéarisées

L'adaptation proposée fonctionne très bien mais, par sa non-linéarité, augmente le temps de calcul de manière importante (pratiquement le double)! On recherche donc une manière linéaire de déformer le maillage tout en s'appuyant sur l'instationnarité du problème. On peut linéariser l'équation (3.92) en procédant de manière explicite. Pour calculer le module

d'Young au temps t on utilise le critère de qualité au temps précédent ($t - 1$) :

$$E_{local}(t) = E_{local}(0) \times f(C_q(t - 1)) \quad (3.93)$$

Toutefois, cette approche linéarisée crée une oscillation des modules d'Young lorsqu'on avance dans le temps. Si les déplacements de la structure sont trop grands, ces oscillations divergent au bout d'un moment ce qui mène au repliement. En effet, si on arrive à limiter fortement la déformation d'une maille grâce à un fort module d'Young, le module d'Young à t_{n+1} devient plus petit puisque la déformation est très faible. Or, la maille subit toujours des "contraintes" très fortes dues à la physique de l'écoulement. Donc, un faible module d'Young E couplé à une grande contrainte induisent une déformation importante du maillage. Au temps suivant, on a alors un module d'Young grand et donc une petite déformation. Ce phénomène se répète alors jusqu'à mener en général au repliement de la maille comme le décrit la table 3.3.

Cette approche linéarisée a l'avantage d'être automatique contrairement à l'approche classique. Toutefois, le décalage en temps (formulation explicite) crée une instabilité de la méthode pour les problèmes raides, c'est à dire lorsqu'il y a de grandes déformations dues à de grands déplacements structurels.

L'utilisation d'une approche non-linéaire apparaît ainsi inévitable si on veut traiter des problèmes d'IFS en grands déplacements sans remailler le domaine à chaque pas de temps. Mais alors, bien qu'il n'y ait pas d'interpolation de la solution à effectuer, l'approche n'est plus forcément plus économique en termes de temps de calcul.

3.4 Intégration en temps

La simulation numérique des phénomènes d'interaction fluide-structure instationnaires nécessite une résolution en temps des variables. La méthode d'intégration en temps doit être efficace et robuste afin de faire face aux problèmes raides que représentent les IFS en grands déplacements. On présentera ainsi dans un premier temps, les schémas habituellement

Temps :	t_1		t_2		t_3		t_4		t_5
Déformation physique :	0	↗	+	↗	++	↗	+++	↗	++++
Déformation du maillage :	0	↗	+	↘	0	↗↗	++	↘	0
	↑	↘	↑	↘	↑	↘	↑	↘	↑
Module d'Young :	E_0	→	E_0	↗	+	↘	E_0	↗↗	++

Tableau 3.3 Evolution du module d'Young pour l'approche linéarisée

utilisés d'Euler implicite et de Crank-Nicolson. On verra ensuite la nécessité d'utiliser des schémas d'ordres supérieurs comme ceux de Runge-Kutta implicites. Enfin, on exposera la formulation adéquate des intégrateurs en temps permettant le respect de la loi de conservation géométrique (GCL).

On note que pour rester consistant, on utilise le même schéma d'intégration en temps pour le fluide, la structure, le pseudo-solide et la masse ponctuelle.

3.4.1 Schémas d'Euler et de Crank-Nicolson implicites

Comme souligné dans la revue de littérature, les schémas d'intégration en temps d'ordre inférieur à 2 sont les plus répandus dans le cadre des problèmes d'IFS. Ils ne nécessitent pas l'introduction de sous-pas de temps implicites entre les pas de temps de calcul. Ceci facilite leur implémentation. Nous considérons ici les schémas implicites d'Euler (ordre Δt^1) et de Crank-Nicolson (ordre Δt^2), plus stables que les schémas explicites.

La méthode d'Euler implicite (*Backward Euler*) repose sur une approximation des dérivées d'une fonction y par une différence finie décentrée :

$$y'(t) = \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Ainsi, appliquée à une simple équation différentielle ordinaire (EDO) $y' = \phi(t, y)$, on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t - \Delta t) + \Delta t \phi(t, y(t)) \\ \text{d'où } y^{(n+1)} &= y^{(n)} + \Delta t \phi(t^{(n+1)}, y^{(n+1)}) \end{aligned} \quad (3.94)$$

où $t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t$, $y^{(n)} = y(t)$ et $y^{(n+1)} = y(t + \Delta t)$. Le schéma d'Euler implicite est alors d'ordre 1 en temps. Le schéma de Crank-Nicolson permet d'augmenter la précision en temps à l'ordre 2 [174, 176] en moyennant la méthode d'Euler implicite et d'Euler explicite :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} && \text{Euler implicite} \\ y'(t - \Delta t) &= \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} && \text{Euler explicite} \\ \text{d'où } \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} &= \frac{y'(t) + y'(t - \Delta t)}{2} && \text{Crank Nicolson} \end{aligned}$$

Appliqué à l'EDO $y' = \phi(t, y)$, le schéma de Crank-Nicolson s'écrit :

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t - \Delta t) + \Delta t \frac{\phi(t, y(t)) + \phi(t - \Delta t, y(t - \Delta t))}{2} \\ \text{d'où } y^{(n+1)} &= y^{(n)} + \Delta t \frac{\phi(t^{(n+1)}, y^{(n+1)}) + \phi(t^{(n)}, y^{(n)})}{2} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Le schéma de Crank-Nicolson étant implicite, il possède de bonnes propriétés de stabilité. Toutefois, la solution numérique peut contenir des oscillations parasites si le problème est trop raide (et le pas de temps trop grands) comme indiqué à la section 2.3. C'est pour cette raison, que beaucoup de chercheurs préfèrent utiliser le schéma d'Euler implicite pour les problèmes raides d'interaction fluide-structure en grands déplacements. En effet, même si sa précision en temps est moindre, il est inconditionnellement stable et ne génère pas d'oscillations parasites. Si on souhaite utiliser des schémas d'intégration en temps d'ordre supérieur, on doit donc chercher des modèles présentant les mêmes propriétés de stabilité que celles du schéma d'Euler implicite.

3.4.2 Schémas de Runge-Kutta

La revue de littérature (voir section 2.3) a mis en lumière les très bonnes propriétés de stabilité des schémas de Runge-Kutta Radau-IIA pour faire face à des problèmes raides. On retrouve naturellement ces propriétés avec le schéma d'Euler implicite puisque ce dernier est en fait le schéma de Radau-IIA d'ordre 1. On utilise trois schémas implicites d'intégration en temps de Runge-Kutta : les schémas de Radau-IIA du premier (IRK1), troisième (IRK3) et cinquième (IRK5) ordres. Ces schémas sont respectivement précis aux 1^{er} , 3^e et 5^e ordres pour la vitesse et les déplacements et aux 1^{er} , 2^e et 3^e ordres pour la pression. D'après Hairer *et al.* [1], comme la pression est un multiplicateur de Lagrange pour l'incompressibilité, les équations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles sont des systèmes d'équations différentielles algébriques (EDA) d'index 2. Cela induit une précision en temps réduite pour le champ de pression.

Pour mieux comprendre les effets des schémas IRK d'intégration en temps, on illustre leur utilisation sur l'exemple d'EDO suivante : $y' = \phi(t, y)$. Un schéma IRK général s'applique à cette équation de la façon suivant :

$$y_*^{(n+c_i)} = y^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} \phi(t^{(n+c_j)}, y_*^{(n+c_j)}), \text{ for } i = 1, \dots, s \quad (3.96)$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^s b_j \phi(t^{(n+c_j)}, y_*^{(n+c_j)}) \quad (3.97)$$

où $t^{(n+c_j)}$ signifie $t^{(n)} + c_j \Delta t$. Ce système est alors résumé de manière compacte sous la forme d'un Tableau général de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

Suivant Hairer [1], pour tous les schémas IRK, on a $a_{si} = b_i$, pour $i = 1 \dots s$ afin d'assurer la L -stabilité. Ainsi, l'étape de projection définie par l'équation (3.97) peut être mise de côté. Remarquons aussi que les schémas IRK sont construits de manière à avoir la propriété suivante : $c_i = \sum_{k=1}^s a_{ik}$, for $i = 1 \dots s$.

A. IRK à l'ordre 1

Le Tableau de Butcher pour le schéma IRK du premier ordre s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline \text{IRK1} & 1 \end{array}$$

Ainsi, on peut résumer le schéma IRK1 (Euler implicite) en une seule ligne :

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta t \phi(t^{(n+1)}, y^{(n+1)}) \quad (3.98)$$

B. IRK à l'ordre 3

Pour l'IRK3, le Tableau de Butcher se présente sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline \text{IRK3} & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

ce qui se traduit par la formulation suivante :

$$y^{(n+1/3)} = y^{(n)} + \frac{5\Delta t}{12} \phi(t^{(n+1/3)}, y^{(n+1/3)}) - \frac{\Delta t}{12} \phi(t^{(n+1)}, y^{(n+1)}) \quad (3.99)$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \frac{3\Delta t}{4} \phi(t^{(n+1/3)}, y^{(n+1/3)}) + \frac{\Delta t}{4} \phi(t^{(n+1)}, y^{(n+1)}) \quad (3.100)$$

On note alors que deux pas de temps implicites sont couplés. Comparé à IRK1, on double alors le nombre d'inconnues lors de la résolution du problème instationnaire de $t^{(n)}$ à $t^{(n+1)}$.

C. IRK à l'ordre 5

Enfin, le schéma Radau-IIA5 peut se résumer ainsi :

$(4-\sqrt{6})/10$	$(88-7\sqrt{6})/360$	$(296-169\sqrt{6})/1800$	$(-2+3\sqrt{6})/225$
$(4+\sqrt{6})/10$	$(296+169\sqrt{6})/1800$	$(88+7\sqrt{6})/360$	$(-2-3\sqrt{6})/225$
1	$(16-\sqrt{6})/36$	$(16+\sqrt{6})/36$	1/9
IRK5	$(16-\sqrt{6})/36$	$(16+\sqrt{6})/36$	1/9

ce qui se traduit en :

$$y^{(n+c_1)} = y^{(n)} + \sum_{j=1}^3 a_{1j} \Delta t \phi(t^{(n+c_j)}, y^{(n+c_j)}) \quad (3.101)$$

$$y^{(n+c_2)} = y^{(n)} + \sum_{j=1}^3 a_{2j} \Delta t \phi(t^{(n+c_j)}, y^{(n+c_j)}) \quad (3.102)$$

$$y^{(n+c_3)} = y^{(n)} + \sum_{j=1}^3 a_{3j} \Delta t \phi(t^{(n+c_j)}, y^{(n+c_j)}) \quad (3.103)$$

Trois pas de temps implicites sont alors couplés, triplant le nombre d'inconnues par rapport à IRK1.

D. IRK à l'ordre 7

Il est intéressant d'étudier des schémas IRK d'ordres encore plus élevés pour deux raisons principales. Tout d'abord, passer d'un schéma d'ordre q à un schéma d'ordre $q + 2$ requiert une augmentation de l'espace mémoire de plus en plus petite quand q croît, pour tendre vers 1. En effet, l'espace mémoire nécessaire au calcul est proportionnel au carré du nombre de pas de temps couplés : $Mem(q) \propto s^2 = (q + 1)^2/4$. On a ainsi :

$$\frac{Mem(q+2)}{Mem(q)} \propto \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^2 \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 1 \quad (3.104)$$

Ensuite, il est intéressant d'utiliser des IRK d'ordres élevés pour simuler précisément des comportements à basses fréquences induits par des phénomènes hautes fréquences. En effet, une grande précision en temps permet de résoudre avec exactitude les phénomènes hautes fréquences tout en ne résolvant le problème qu'à intervalles de temps grands correspondant au comportement basses fréquences étudiés. L'étude du galop d'un cylindre dans un écoulement en est un parfait exemple. La période du galop est longue mais la résolution nécessite une bonne précision temporelle pour capter les lâchers tourbillonnaires, à plus hautes fréquences, responsables du galop. Toutefois, il n'est pas nécessaire d'avoir la solution du problème à ces

hautes fréquences mais seulement en quelques points de la période de galop. D'où l'utilité de schémas de IRK d'autres très élevés. Dans cette optique, on a déterminé les coefficients du tableau de Butcher constituant l'IRK d'ordre 7 avec 4 pas de temps implicites :

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
1	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
IRK7	b_1	b_2	b_3	b_4

avec les c_i suivants pour le calcul des temps implicites :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{50}}{7} \frac{2}{245}} \left[\cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)}{3} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)}{3} \right) \right] + \frac{45}{105} \\
 c_2 &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{50}}{7} \frac{2}{245}} \left[-\cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)}{3} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)}{3} \right) \right] + \frac{45}{105} \\
 c_3 &= 2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{50}}{7} \frac{2}{245}} \cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)}{3} \right) + \frac{45}{105} \\
 c_4 &= 1
 \end{aligned}$$

Les coefficients b_j vérifient le système linéaire suivant faisant intervenir une matrice de Vandermonde V :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_4^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & c_4^3 \end{bmatrix}}_V \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Les b_j s'obtiennent ainsi après inversion de la matrice de Vandermonde V :

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -(c_2 + c_3 + c_2 c_3) & c_2 + c_3 + 1 & -1 \\ -c_1 c_3 & c_1 + c_3 + c_1 c_3 & -(c_1 + c_3 + 1) & 1 \\ c_1 c_2 & -(c_1 + c_2 + c_1 c_2) & c_1 + c_2 + 1 & -1 \\ -c_1 c_2 c_3 & c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3 & -(c_1 + c_2 + c_3) & 1 \end{bmatrix}$$

où les coefficients de la matrice diagonale D s'écrivent :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{(1-c_1)(c_3-c_1)(c_2-c_1)} \\ d_2 &= \frac{1}{(1-c_2)(c_3-c_2)(c_2-c_1)} \\ d_3 &= \frac{1}{(1-c_3)(c_3-c_2)(c_3-c_1)} \\ d_4 &= \frac{1}{(1-c_1)(1-c_2)(1-c_3)} \end{aligned}$$

Ainsi les b_j s'expriment :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{12} \frac{1 - 2(c_2 + c_3) + 6c_2c_3}{(1-c_1)(c_3-c_1)(c_2-c_1)} \\ b_2 &= -\frac{1}{12} \frac{1 - 2(c_1 + c_3) + 6c_1c_3}{(1-c_2)(c_3-c_2)(c_2-c_1)} \\ b_3 &= \frac{1}{12} \frac{1 - 2(c_1 + c_2) + 6c_1c_2}{(1-c_3)(c_3-c_2)(c_3-c_1)} \\ b_4 &= \frac{1}{12} \frac{3 - 4(c_1 + c_2 + c_3) + 6(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1) - 12c_1c_2c_3}{(1-c_1)(1-c_2)(1-c_3)} \end{aligned}$$

On vérifie que $\sum_1^4 b_i = 1$.

Enfin, les coefficients a_{ij} du tableau de Butcher se déduisent de la formule suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} c_i \\ c_i^2/2 \\ c_i^3/3 \\ c_i^4/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= d_1 \left[c_1c_2c_3 - \frac{c_1^2}{2}(c_2 + c_3 + c_2c_3) + \frac{c_1^3}{3}(c_2 + c_3 + 1) - \frac{c_1^4}{4} \right] \\ a_{12} &= d_2 \left[-c_1^2c_3 + \frac{c_1^2}{2}(c_1 + c_3 + c_1c_3) - \frac{c_1^3}{3}(c_1 + c_3 + 1) + \frac{c_1^4}{4} \right] \\ a_{13} &= d_3 \left[c_1^2c_2 - \frac{c_1^2}{2}(c_1 + c_2 + c_1c_2) + \frac{c_1^3}{3}(c_1 + c_2 + 1) - \frac{c_1^4}{4} \right] \\ a_{14} &= d_4 \left[-c_1^2c_2c_3 + \frac{c_1^2}{2}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3) - \frac{c_1^3}{3}(c_1 + c_2 + c_3) + \frac{c_1^4}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= d_1 \left[c_2^2 c_3 - \frac{c_2^2}{2}(c_2 + c_3 + c_2 c_3) + \frac{c_2^3}{3}(c_2 + c_3 + 1) - \frac{c_2^4}{4} \right] \\
a_{22} &= d_2 \left[-c_1 c_2 c_3 + \frac{c_2^2}{2}(c_1 + c_3 + c_1 c_3) - \frac{c_2^3}{3}(c_1 + c_3 + 1) + \frac{c_2^4}{4} \right] \\
a_{23} &= d_3 \left[c_1 c_2^2 - \frac{c_2^2}{2}(c_1 + c_2 + c_1 c_2) + \frac{c_2^3}{3}(c_1 + c_2 + 1) - \frac{c_2^4}{4} \right] \\
a_{24} &= d_4 \left[-c_1 c_2^2 c_3 + \frac{c_2^2}{2}(c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3) - \frac{c_2^3}{3}(c_1 + c_2 + c_3) + \frac{c_2^4}{4} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= d_1 \left[c_2 c_3^2 - \frac{c_3^2}{2}(c_2 + c_3 + c_2 c_3) + \frac{c_3^3}{3}(c_2 + c_3 + 1) - \frac{c_3^4}{4} \right] \\
a_{32} &= d_2 \left[-c_1 c_3^2 + \frac{c_3^2}{2}(c_1 + c_3 + c_1 c_3) - \frac{c_3^3}{3}(c_1 + c_3 + 1) + \frac{c_3^4}{4} \right] \\
a_{33} &= d_3 \left[c_1 c_2 c_3 - \frac{c_3^2}{2}(c_1 + c_2 + c_1 c_2) + \frac{c_3^3}{3}(c_1 + c_2 + 1) - \frac{c_3^4}{4} \right] \\
a_{34} &= d_4 \left[-c_1 c_2 c_3^2 + \frac{c_3^2}{2}(c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3) - \frac{c_3^3}{3}(c_1 + c_2 + c_3) + \frac{c_3^4}{4} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= d_1 \left[c_2 c_3 - \frac{1}{2}(c_2 + c_3 + c_2 c_3) + \frac{1}{3}(c_2 + c_3 + 1) - \frac{1}{4} \right] \\
a_{42} &= d_2 \left[-c_1 c_3 + \frac{1}{2}(c_1 + c_3 + c_1 c_3) - \frac{1}{3}(c_1 + c_3 + 1) + \frac{1}{4} \right] \\
a_{43} &= d_3 \left[c_1 c_2 - \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_1 c_2) + \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + 1) - \frac{1}{4} \right] \\
a_{44} &= d_4 \left[-c_1 c_2 c_3 + \frac{1}{2}(c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3) - \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3) + \frac{1}{4} \right]
\end{aligned}$$

E. Vérification sur un problème simplifié

Afin de vérifier les valeurs des tableaux de Butcher pour les schémas implicites de Runge-Kutta (et surtout IRK7), on considère le problème raide de Curtiss et Hirschfelder (1952) présenté dans le livre d'Hairer et Wanner [1] :

$$y' = -\frac{1}{\epsilon}(y - \cos(t)), \text{ avec : } \epsilon = 0.0005 \quad (3.105)$$

Ce problème a pour solution exacte la fonction suivante :

$$y_e(t) = \left(y(0) - \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon^2} \right) e^{-t/\epsilon} + \frac{\cos(t)}{1+\epsilon^2} + \frac{\epsilon \sin(t)}{1+\epsilon^2} \quad (3.106)$$

On simplifie la résolution du problème, en remplaçant y par sa solution exacte dans l'équation 3.105 :

$$y' = -\frac{1}{\epsilon} \left[\left(y(0) - \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon^2} \right) e^{-t/\epsilon} + \frac{\cos(t)}{1+\epsilon^2} + \frac{\epsilon \sin(t)}{1+\epsilon^2} - \cos(t) \right] \quad (3.107)$$

où $y(0) = 0$. On résout l'équation sur l'intervalle $[0, 1.5]$ avec 12 pas de temps différents : $\delta t_i = 1.5/2^i, \forall i \in [1 : 12]$ et les différentes méthodes d'intégrations présentées. La figure 3.3 présente les résultats obtenus en considérant l'erreur $eRMS$ de la solution interpolée par une spline cubique par rapport à la solution exacte :

$$eRMS = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{(y(t_i) - y_e(t_i))^2}{N}}$$

où N est le nombre de pas temps t_i .

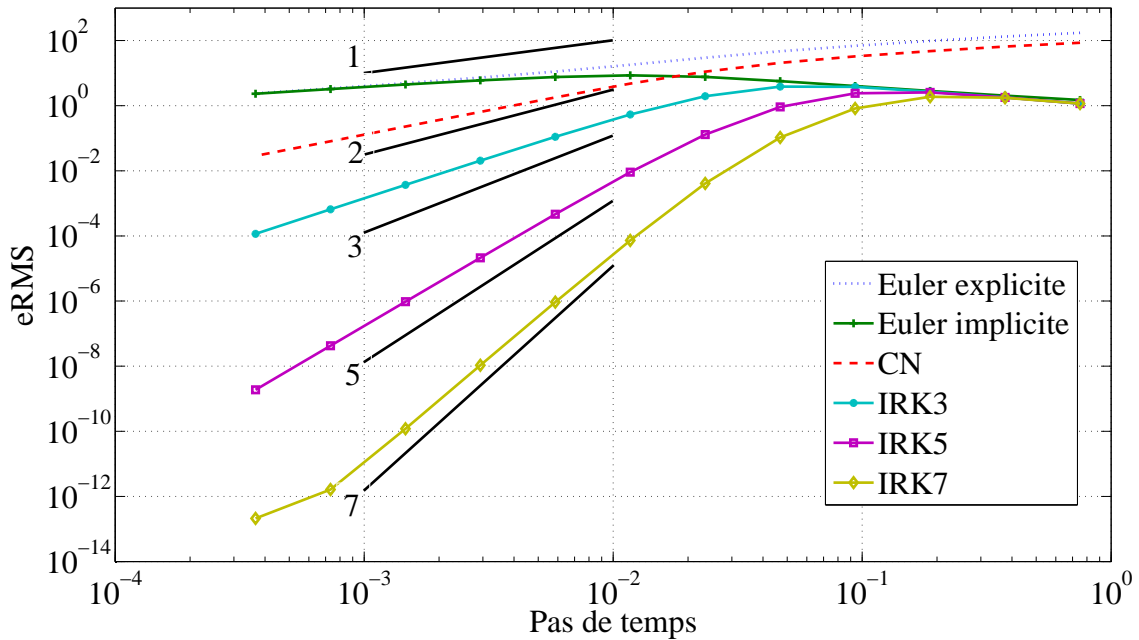


Figure 3.3 Convergence des méthodes d'intégration en temps pour un problème simplifié.

Lorsque la zone asymptotique est atteinte, on obtient bien les ordres de convergence théoriques des différents schémas d'intégration en temps, notamment une convergence d'ordre 7 pour IRK7. On remarque d'ailleurs le début de phénomène de saturation de l'erreur puisque le schéma IRK7 atteint le zéro machine (et on remarque que pour les grands pas de temps, l'interpolation de la solution par une spline cubique induit une erreur prépondérante ce qui provoque une augmentation de l'erreur).

3.4.3 Formulation respectant la GCL

La section 2.3 de la revue de littérature a souligné l'importance d'avoir une formulation ALE respectant la loi de conservation géométrique (GCL), notamment au niveau de l'intégration en temps. Parmi les approches existantes, nous reprenons celle présentée par Étienne *et al.* [128] qui consiste à évaluer séparément la vitesse de maille \mathbf{u}_m et sa divergence $\nabla \cdot \mathbf{u}_m$ afin de respecter la GCL.

La forme faible des équations de Navier-Stokes est obtenue en multipliant l'équation (3.14) par une fonction test \mathbf{w} et en intégrant le tout sur le domaine de calcul $\Omega(t)$ se déformant avec le temps t :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(t)} \mathbf{w} \cdot \rho_f \frac{d\mathbf{u}_f}{dt} d\Omega \\ & + \int_{\Omega(t)} \mathbf{w} \cdot \{ \rho_f [(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_m) \cdot \nabla] \mathbf{u}_f + \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma}_f \} d\Omega = \int_{\Gamma_N(t)} \mathbf{w} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.108)$$

Cette formulation est dite *non-conservative* car elle ne permet par l'application directe du théorème de la divergence. Si on considère la transformation $T^{(t)}$ de $\Omega(0)$, le domaine de référence, à $\Omega(t)$, le domaine de calcul, comme régulière pour tout temps t , *i.e.* de classe $C^{(1)}$, injective et telle que son déterminant $J(t) \neq 0$ sur $\Omega(0)$, on reformule l'équation 3.108 sous sa forme *conservative* :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \mathbf{w} \cdot \rho_f \mathbf{u}_f d\Omega - \int_{\Omega(t)} \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}_m) \rho_f \mathbf{u}_f d\Omega \\ & + \int_{\Omega(t)} \mathbf{w} \cdot \{ \rho_f [(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_m) \cdot \nabla] \mathbf{u}_f + \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma}_f \} d\Omega = \int_{\Gamma_N(t)} \mathbf{w} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.109)$$

Bien que ces deux formulations faibles conservatives et non-conservatives sont totalement équivalentes d'un point de vue mathématique, elle ne le restent pas nécessairement lorsqu'on procède à une discrétisation numérique des équations. La forme conservative correspond à la forme générale des lois de conservation puisque son intégration sur un volume fixe Ω rend l'application du théorème de la divergence possible, et produit un terme impliquant

une intégrale surfacique. L'intégrale de surface représente alors le flux de masse sortant du volume Ω . Ainsi, l'importance de la forme conservative dans un schéma numérique discret repose sur le fait que, si correctement prise en compte, la discrétisation de la forme conservative mène à un schéma dans lequel tous les flux de masse à travers les frontières d'une maille vont s'annuler les uns les autres de sorte que le schéma numérique conservera une masse totale constante. Ce traitement n'est pas possible avec une forme non-conservative.

Sur un volume $\Omega(t)$ se déformant avec le temps, la divergence de la vitesse de maille apparaissant dans la formulation conservative 3.109 doit en plus être évaluée de manière à satisfaire la loi de conservation géométrique (GCL). Étienne *et al.* [128] ont développé une construction systématique de cette divergence en imposant le respect des deux premiers niveaux de la GCL sur la formulation conservative et obtiennent l'expression suivante pour les schémas d'intégration implicites de Runge-Kutta :

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_m)^{(n+c_j)} = \sum_{i=1}^s [a_{ij}]^{-1} \frac{J^{(n+c_i)} - J^{(n)}}{\Delta t J^{(n+c_j)}}, j = 1 \dots s \quad (3.110)$$

si le maillage est constitué de triangles (ou tétraèdres en 3D) à arêtes droites se déformant linéairement.

Concernant la vitesse maille, elle est construite de manière à satisfaire le troisième niveau de conformité de la GCL à savoir assurer la même précision en temps de l'intégrateur sur un maillage se déformant que sur un domaine fixe. Cette construction se fait indépendamment de celle de la divergence de la vitesse de maille et s'écrit pour les intégrateurs IRK :

$$\mathbf{u}_m^{(n+c_j)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s [a_{ij}]^{-1} \frac{\mathbf{x}^{(n+c_i)} - \mathbf{x}^{(n)}}{\Delta t}, j = 1 \dots s \quad (3.111)$$

si le maillage est constitué de triangles (ou tétraèdres en 3D) à arêtes droites se déformant linéairement.

L'utilisation de schémas implicites de Runge-Kutta d'ordres élevés va permettre la résolution précise de problèmes raides d'interaction fluide-structure en grands déplacements. La grande stabilité des schémas de Radau-IIA élimine toutes oscillations parasites sans induire d'amortissement numérique. En outre, la formulation respectant la GCL conserve la grande précision de ces schémas (même dans le cas d'écoulements incompressibles), induisant un gain de temps de calcul notable.

3.5 Stratégie de résolution

Le problème d'interaction fluide-structure fortement couplé est résolu de manière implicite à l'aide d'une procédure éléments finis de Newton-Raphson. La stratégie de résolution est donc basée sur une formulation *monolithique totalement implicite* adaptée de notre travail de maîtrise [109]. On fait donc ici un bref rappel des caractéristiques de la méthode d'éléments finis (MEF) utilisée, un résumé de l'approche monolithique implicite et une courte présentation du solveur utilisé.

3.5.1 Méthode des éléments finis

La résolution numérique des systèmes d'équations aux dérivées partielles présentées aux sections 3.2 et 3.3 s'effectue à l'aide de la *méthode des éléments finis* (MEF). Elle repose sur une formulation faible des équations qu'on discrétise sur des sous-domaines de calcul simples appelés éléments.

La formulation faible des équations est semblable à celle présentée dans notre travail de maîtrise [109]. On doit toutefois porter une attention particulière au respect de la loi de conservation géométrique (GCL) comme expliqué à la section 3.4.3. De plus, la *méthode des réactions* [177] permet d'appliquer les forces fluides sur la structure (flexible ou masse ponctuelle) de manière implicite sans alourdir ni ralentir la phase de résolution et ce indépendamment du type d'élément retenu. On récupère également les efforts aérodynamiques totaux sans post-traitement des données grâce au calcul implicite des réactions nodales sur l'interface \mathbf{r}^{int} .

Très brièvement on obtient les équations éléments finis en discrétisant la forme variationnelle des équations obtenue précédemment. On découpe le domaine de calcul en sous-domaines simples appelés éléments. On utilise la méthode de Galerkin qui consiste à discrétiser la forme faible et à prendre comme fonctions tests les fonctions d'interpolation de la solution. La discrétisation du domaine de calcul repose sur un maillage non-structuré avec des éléments de type Taylor-Hood à 6 nœuds (P_2-P_1). Cet élément est linéaire en pression et quadratique en vitesse et en déplacement comme illustré sur la figure 3.4. Il est à noter que la pression est continue par morceaux. En outre, dans le cadre d'une approche monolithique, un traitement implicite de toutes les conditions frontières y compris celles à l'interface est nécessaire. On utilise ainsi une discrétisation spéciale à l'aide d'éléments unidimensionnels d'épaisseur nulle appelés *éléments d'interface* présentés sur la figure 3.4. Ils ont pour fonction de communiquer les forces fluides au solide et d'imposer les déplacements du

solide au pseudo-solide de manière implicite. Ces éléments sont eux aussi quadratiques pour les vitesses, les déplacements et les réactions nodales.

Ils assurent un couplage le plus intime possible entre le fluide et le solide comme c'est illustré sur la figure 3.4. L'élément d'interface à gauche impose les relations de mouvement $\chi_{ps} = \chi_s$ et $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_s$. Autrement dit, il transmet le mouvement du solide (χ_s, \mathbf{u}_s) au domaine fluide, via la déformation du pseudo-solide χ_{ps} pour le déplacement. L'élément de droite garantit l'équilibre des forces de part et d'autre de l'interface grâce aux réactions nodales : $\mathbf{r}_s^{int} = \mathbf{r}_f^{int}$. Ainsi, les forces induites par l'écoulement du fluide sont transférées au solide qui va subir des déformations. Cette boucle illustre très bien le couplage implicite à l'interface. Dans le cas d'un solide rigide modélisé par une masse ponctuelle, la boucle de couplage est similaire. La seule différence réside dans le mouvement du solide rigide qui est uniforme tant à sa frontière Γ qu'en son sein.

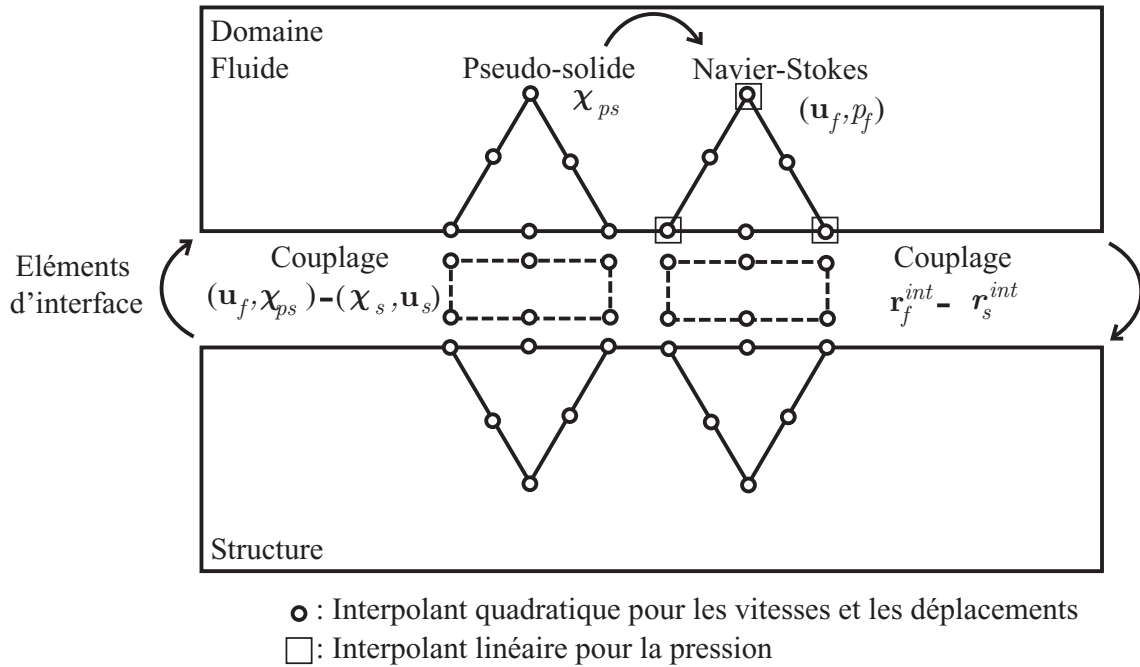


Figure 3.4 Maillage non-structuré : éléments de Taylor-Hood et couplage implicite à l'interface fluide-structure.

3.5.2 Calcul des réactions pour les IRK

Avant d'assembler le système global, on introduit une variante implicite de la *méthode des réactions*[177, 109]. On rappelle que cette méthode s'appuie sur une reformulation des formes faibles des équations 3.14 et 3.18 pour faire apparaître deux nouvelles inconnues, les

réactions du fluide \mathbf{r}_f^{int} et de la structure \mathbf{r}_s^{int} :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{N_1}^f \cup \Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma &= \underbrace{\int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma}_{\mathbf{r}_f^{int}} \\
&+ \underbrace{\int_{\Gamma_{N_1}^f} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma}_{\text{condition de Neumann}} \\
\int_{\Gamma_{N_0}^s \cup \Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) \delta \Gamma &= \underbrace{\int_{\Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) \delta \Gamma}_{\mathbf{r}_s^{int}} \\
&+ \underbrace{\int_{\Gamma_{N_0}^s} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) \delta \Gamma}_{\text{condition de Neumann}} \tag{3.112}
\end{aligned}$$

Cette méthode est la clef de voute de l'approche monolithique implicite. En effet, \mathbf{r}_f^{int} et \mathbf{r}_s^{int} permettent d'appliquer les forces fluides sur la structure de manière implicite sans alourdir ni ralentir la phase de résolution et indépendamment du type d'élément retenu.

Dans le cadre des schémas d'intégration en temps de Runge-Kutta, les réactions \mathbf{r}^{n+c_i} sont calculées pour chaque sous-pas de temps implicites t^{n+c_i} . Or, ce ne sont pas des inconnues du problème mais des variables secondaires (issues des conditions naturelles de Neumann). C'est pourquoi \mathbf{r}^{n+1} ne correspond pas à la condition de Neumann de l'équation de mouvement au temps t^{n+1} mais à une variable secondaire d'un système d'équations couplées aux différents sous-pas de temps implicites t^{n+c_i} . Plus précisément, \mathbf{r}^{n+c_i} est la réaction au temps :

$$t_p^{n+c_i} = \sum_{i=1}^s a_{ij} t^{n+c_i}$$

Ainsi, pour extraire les efforts \mathbf{L}^{n+1} au temps t^{n+1} on doit les reconstruire à partir de ces réactions calculées \mathbf{r}^{n+c_i} . On "découple" en quelque sorte ces variables secondaires grâce au tableau de Butcher inversé. Par exemple, on obtient les efforts selon \vec{x} avec la formule

suivante :

$$\mathbf{L}_x^{n+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{si} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_x^{n+c_1} \\ \vdots \\ r_x^{n+c_i} \\ \vdots \\ r_x^{n+c_s} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

où s est le nombre d'étages du schéma IRK et a_{ij} représentent les coefficients du tableau de Butcher associé.

3.5.3 Approche monolithique

La stratégie de résolution des équations présentées aux sections 3.2 et 3.3, repose sur une approche monolithique [109]. Tous les degrés de liberté du problème de tous les sous-pas de temps implicites sont ainsi couplés dans un seul système matriciel :

- vitesses et pressions dans le domaine fluide (\mathbf{u}_f, p) ;
- déplacements pseudo-solide dans le domaine fluide (χ_{ps}) ;
- vitesses et déplacements dans le solide (\mathbf{u}_s, χ_s) ;
- vitesses et déplacements de la masse ponctuelle $(\mathbf{u}_{mp}, \chi_{mp})$;
- réactions nodales sur l'interface fluide-solide (\mathbf{r}^{int}) ;
- réactions nodales sur la masse ponctuelle (\mathbf{r}^Γ) .

À chaque pas de temps, toutes les équations discrétisées, y compris celles correspondant aux conditions d'équilibre à l'interface, sont donc assemblées dans un seul et même système global non-linéaire $\mathbf{R}(\mathbf{U}(t)) = 0$. Ce système est schématisé pour les trois principaux cas étudiés sous forme d'une matrice globale : profil flexible (encastré ou oscillant) sur la figure 3.5, profil rigide autopropulsé sur la figure 3.6 et profil flexible autopropulsé sur la figure 3.8.

A. Cas d'un profil flexible (encastré ou oscillant)

Pour les problèmes d'interaction fluide-structure sans mouvement libre de corps rigide (cas d'un profil flexible encastré ou oscillant), 11 inconnues forment le vecteur d'état : $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_f, p_f, \mathbf{u}_f^{int}, \mathbf{r}_f^{int}, \chi_{ps}, \chi_{ps}^{int}, \chi_s^{int}, \mathbf{r}_s^{int}, \mathbf{u}_s^{int}, \chi_s, \mathbf{u}_s]^T$, où $(^{int})$ dénote une valeur sur l'interface. Pour calculer ces variables, on dispose des équations présentées précédemment qui forment le système global d'équations résiduelles $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$ illustré sur la figure 3.5. Les zones ombragées indiquent la contribution de la forme faible correspondante et le symbole \mathbf{I} , correspondant à la matrice identité, traduit la continuité des inconnues à l'interface.

1											
2											
3			I						-I		
4				-I							
5											
6						I	-I				
7								-I			
8				-I				I			
9								-I			
10											
11											

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_f \\ p_f \\ \mathbf{u}_f^{int} \\ \mathbf{r}_f^{int} \\ \chi_{ps} \\ \chi_{ps}^{int} \\ \chi_s^{int} \\ \mathbf{r}_s^{int} \\ \mathbf{u}_s^{int} \\ \chi_s \\ \mathbf{u}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Figure 3.5 Matrice globale pour le cas d'un profil flexible (encastré ou oscillant)

Ainsi, les lignes **1** et **2** correspondent aux équations de Navier-Stokes, les lignes **5** et **10** traduisent respectivement les équations de Cauchy pour le pseudo-solide et pour le solide et la ligne **11** représente les équations des vitesses du solide. Ensuite, à l'interface, les lignes **3** et **6** expriment respectivement la continuité des vitesses et des déplacements et la ligne **8** reflète la condition d'équilibre des forces fluides et solides. Enfin, la ligne **4** représente la relation implicite entre les réactions du fluide et les autres inconnues alors que les lignes **7** et **9** expriment la même sorte de relation implicite pour les réactions du solide.

La différence entre un profil encastré et un profil oscillant apparaît seulement sur les équations de conditions aux frontières du solide (voir section 3.5.4).

Remarque : Malgré l'adimensionnalisation des équations présentée à la section 3.2.5, les coefficients des équations structurelles et pseudo-solide peuvent prendre des valeurs très élevées qui déséquilibrent le système d'équations. Ainsi il arrive que le solveur diverge dans les cas où les modules d'Young sont importants (nombre de Cauchy très faibles). Afin de pré-conditionner le système d'équations, on propose de diviser les équations structurelles et pseudo-solides par la valeur maximale du module d'Young, ce qui ne change en rien à la valeur de la solution. Il n'est donc pas nécessaire de répercuter ces changements sur les équations d'interface. En pratique, on note une nette amélioration de la convergence du solveur.

B. Cas d'un profil rigide autopropulsé

Dans le cas d'un profil rigide autopropulsé, on considère le mouvement libre de corps rigide d'un solide soumis aux forces fluides. On introduit donc une masse ponctuelle pour modéliser le solide. Le vecteur d'état est alors formé de 9 variables : $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_f, p_f, \mathbf{u}_f^\Gamma, \mathbf{r}_f^\Gamma, \chi_{ps}, \chi_{ps}^\Gamma, \mathbf{r}_{mp}^\Gamma, \mathbf{u}_{mp}, \chi_{mp}]^T$, où $(^\Gamma)$ dénote une valeur sur la frontière mouillée du solide rigide. La figure 3.5 présente le système global d'équations résiduelles à résoudre $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$.

1									
2									
3			I					-I	
4				-I					
5									
6						I			-I
7				-I			I		
8									
9									

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_f \\ p_f \\ \mathbf{u}_f^\Gamma \\ \mathbf{r}_f^\Gamma \\ \chi_{ps} \\ \chi_{ps}^\Gamma \\ \mathbf{r}_{mp}^\Gamma \\ \mathbf{u}_{mp} \\ \chi_{mp} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Figure 3.6 Matrice globale pour le cas d'un profil rigide autopropulsé

Tout d'abord, comme pour le cas A, les équations de Navier-Stokes sont représentées sur les lignes **1** et **2**, la ligne **5** traduit l'équation de Cauchy pour le pseudo-solide et la ligne **4** représente la relation implicite entre les réactions du fluide et les autres inconnues. Ensuite, les lignes **8** et **9** représentent les équations de la masse ponctuelle modélisant le mouvement libre du solide. Enfin, les lignes **3**, **6** et **7** expriment respectivement la continuité des vitesses, des déplacements et des efforts à la frontière mouillée du solide.

On doit ici noter l'importance de respecter l'ordre des équations de la masse ponctuelle afin que la matrice résultante reste inversible (lignes **8** et **9**). Les équations 3.27 et 3.28 gouvernant le mouvement de la masse ponctuelle se discrétisent avec un pas de temps Δt

comme suit :

$$\mathbf{u}_{mp} = \frac{\Delta \chi_{mp}}{\Delta t} \quad \text{sur } \chi_{mp} \quad (3.114)$$

$$\mathbf{f}_{aero} = m \mathbf{a}_{mp} = m \frac{\Delta u_{mp}}{\Delta t} \quad \text{sur } u_{mp} \quad (3.115)$$

Afin d'avoir une matrice inversible, l'implantation des équations précédentes doit se faire comme suit ;

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \chi_{mp} \\ \Delta u_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{mp} \\ \mathbf{r}_{mp}^\Gamma \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{f}_{aero} = \mathbf{r}_{mp}^\Gamma$.

En effet, si on n'y prend pas garde, on peut former le système non-inversible suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta t} \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{mp} \\ \Delta \chi_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{mp} \\ \mathbf{r}_{mp}^\Gamma \end{bmatrix}$$

C. Cas d'un profil flexible autopropulsé

Si on ajoute une partie flexible au solide constituant le profil autopropulsé, de nouvelles relations d'interface doivent être prises en compte. On considère ici seulement le cas où la partie rigide du solide est entourée entièrement par la partie flexible comme représenté sur la figure 3.7. Deux interfaces doivent donc être considérées : l'interface IFS Γ^{int} entre le fluide et la structure flexible et la frontière Γ entre la structure flexible et la partie rigide.

On considère ainsi 17 variables pour former le vecteur d'état : $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_f, p_f, \mathbf{u}_f^{int}, \mathbf{r}_f^{int}, \chi_{ps}, \chi_{ps}^{int}, \chi_s^{int}, \mathbf{r}_s^{int}, \mathbf{u}_s^{int}, \chi_s, \mathbf{u}_s, \mathbf{u}_s^\Gamma, \chi_s^\Gamma, \mathbf{r}_s^{int}, \mathbf{r}_{mp}^\Gamma, \mathbf{u}_{mp}, \chi_{mp}]^T$, où $(^{int})$ dénote une valeur sur l'interface IFS et $(^\Gamma)$ sur la frontière mouillée du solide rigide. Le système global $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$ est schématisé sur la figure 3.8.

Dans ce cas, la matrice globale comprends trois blocs diagonaux correspondant aux équations régissant le domaine fluide (lignes **1**, **2**, **4** et **5**), la structure flexible (lignes **7**, **9**, **10**, **11** et **14**) et la masse ponctuelle (lignes **16** et **17**). Les relations d'interface s'expriment par les termes en dehors de ces blocs diagonaux : lignes **3**, **6** et **8** pour l'équilibre à l'interface fluide-structure et lignes **12**, **13** et **15** pour la continuité sur la frontière Γ du solide rigide.

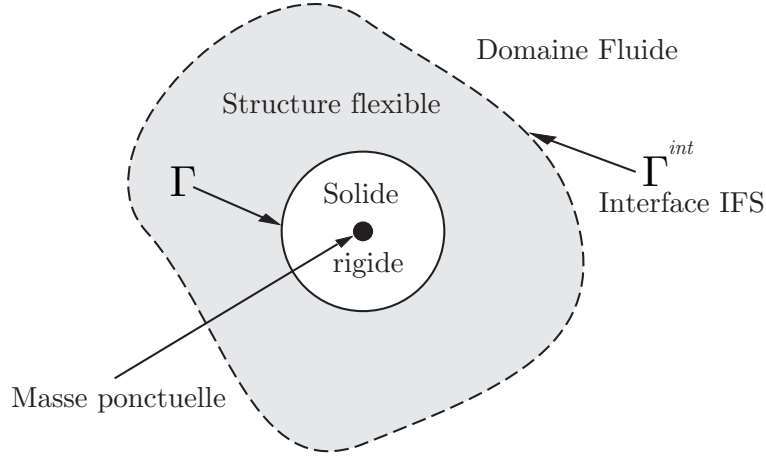


Figure 3.7 Modélisation pour une structure flexible autopropulsée.

3.5.4 Imposition des conditions aux limites

Les conditions aux limites de Dirichlet imposent des valeurs connues sur certaines frontières du domaine. Les matrices globales \mathbf{R} présentées précédemment peuvent donc tenir compte directement des conditions aux limites. Ainsi, les vecteurs d'inconnues \mathbf{U} ne font pas apparaître ces conditions aux limites $\bar{\mathbf{U}}$. Toutefois, c'est une manière explicite d'imposer ces conditions aux limites. Par conséquent, l'approche monolithique n'est plus entièrement implicite ce qui peut poser des problèmes de stabilité.

En effet, si on impose de cette manière le déplacement χ_s du profil oscillant, les frontières sont explicitement déplacées avant même de résoudre le système. Ainsi, les autres points du domaine n'étant pas déplacés, la résolution se fait sur un domaine replié si le déplacement du solide est trop grand comme le montre la figure 3.9. On remarque alors que le pas de temps Δt de l'intégrateur est alors limité par la taille du maillage Δh pour éviter le repliement. Contrairement à une formulation implicite, la longueur pas de temps n'est plus alors dictée par la précision désirée mais pas une relation de stabilité de la forme :

$$\chi_s(t + \Delta t) - \chi_s(t) < \Delta h \quad (3.116)$$

Pour éviter ces problèmes de stabilité, les conditions aux limites doivent être imposées de manière implicite. Pour ce faire, on utilise une méthode directe en introduisant les conditions

$$\begin{pmatrix}
 \mathbf{u}_f \\
 p_f \\
 \mathbf{u}_f^{int} \\
 \mathbf{r}_f^{int} \\
 \chi_{ps} \\
 \chi_{ps}^{int} \\
 \chi_s^{int} \\
 \mathbf{r}_s^{int} \\
 \mathbf{u}_s^{int} \\
 \chi_s \\
 \mathbf{u}_s \\
 \mathbf{u}_s^\Gamma \\
 \chi_s^\Gamma \\
 \mathbf{r}_s^\Gamma \\
 \mathbf{r}_{mp}^\Gamma \\
 \mathbf{u}_{mp} \\
 \chi_{mp}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

Figure 3.8 Matrice globale pour le cas d'un profil flexible autopropulsé.

aux limites dans le vecteur des inconnues :

$$\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R}^\Gamma \\ 0 & \overline{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \overline{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

où \mathbf{U}^Γ représente les degrés de liberté sur lesquels s'appliquent les conditions aux limites $\overline{\mathbf{U}}$. En règle générale $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{I}$. On réduit alors ce système en un système équivalent afin de réduire le nombre d'équations :

$$\mathbf{R}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.118)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} - \mathbf{R}^\Gamma \mathbf{U}^\Gamma = \mathbf{F} - \mathbf{R}^\Gamma \overline{\mathbf{R}}^{-1} \overline{\mathbf{U}} \quad (3.119)$$

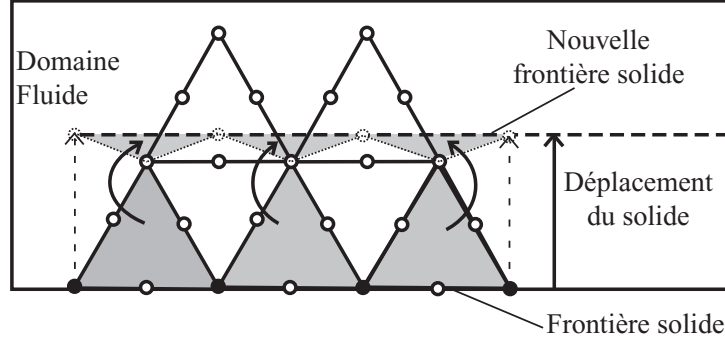


Figure 3.9 Repliement du maillage avec des conditions aux limites explicites.

3.5.5 Méthode de Newton-Raphson

Pour résoudre ce système global creux $\mathbf{R}(\mathbf{U}(t)) = 0$ à chaque pas de temps, on initialise toutes les variables grâce à la solution au temps précédent $\mathbf{U}(t - 1)$. On dispose alors d'une bonne estimation initiale de la solution pour assurer la convergence de la méthode de Newton-Raphson. Cette dernière utilise une évaluation de la *matrice jacobienne* $\bar{\mathbf{J}}$ qui décrit la sensibilité des équations par rapport à chacune des inconnues pour déterminer les vecteurs de correction successifs $\delta\mathbf{U}(t)$:

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{U}^n(t)) \delta\mathbf{U}^n(t) = -\mathbf{R}(\mathbf{U}^n(t)) \quad (3.120)$$

$$\mathbf{U}^{n+1}(t) = \mathbf{U}^n(t) + \delta\mathbf{U}^n(t) \quad (3.121)$$

$$\text{où} \quad J_{ij} = \frac{\partial R_i(\mathbf{U}^n(t))}{\partial U_j(t)}$$

On utilise l'approche du *jacobien numérique* [148] qui approxime les dérivées par différences finies en perturbant la solution d'une petite quantité δ :

$$J_{ij} = \frac{\partial R_i(\mathbf{U}^n(t))}{\partial U_j(t)} = \frac{R_i(U_1^n(t), U_2^n(t), \dots, U_j^n(t) + \delta, \dots, U_N^n(t)) - R_i(\mathbf{U}^n(t))}{\delta} \quad (3.122)$$

Cette technique de linéarisation des équations couplées permet de prendre en compte toutes les dépendances implicites. Ainsi, la stratégie monolithique adoptée ici permet d'atteindre une convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson. Ceci se fait aux dépens du nombre de variables et de la taille du système qui augmentent par rapport à une approche découplée. Toutefois, cet inconvénient est largement compensé par la réduction significative du nombre d'itérations de Newton, i.e. : du temps de calcul. De plus, l'utilisation de la factorisation conditionnelle [109] permet un gain notable de temps de calcul en évitant de

recalculer à chaque itération de Newton la matrice inverse de $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$. En pratique, les résolutions numériques successives de $\mathbf{U}^n(t)$ se font à l'aide du logiciel PARDISO [178, 179].

Ce chapitre a présenté la méthodologie adoptée pour simuler les interactions fluide-structure instationnaires en grands déplacements. On a souligné les principaux développements nécessaires effectués pendant ce projet de recherche. Les deux chapitres suivants traitent de la mise en pratique de ces développements dans le cadre de simulations numériques. Tout d'abord, on expose des cas de vérification des différents volets composant cette étude. Ensuite, on applique notre méthodologie à des cas pratiques faisant intervenir tout ou partie des concepts théoriques développés jusque là.

CHAPITRE 4

VÉRIFICATIONS

Ce chapitre présente des cas intéressants permettant la vérification du code de calcul. Il est en effet important de vérifier la bonne implémentation des schémas de résolution des équations, des schémas d'intégration en temps et du solveur avant d'aborder les problèmes d'application qui feront l'objet du dernier chapitre. Contrairement à la *validation* qui compare les modèles mathématiques avec le phénomène naturel qu'il tente de décrire, la *vérification* se réfère à la comparaison d'une solution connue (exacte) tirée des équations qui nous intéressent avec la solution numérique obtenue par le code de calcul en résolvant ces mêmes équations. Cette solution connue doit être suffisamment complexe pour activer tous les termes des équations et pour s'assurer qu'ils sont bien traités par le code. Une analyse de convergence sur un problème dont la solution est connue permet alors d'évaluer la performance du solveur.

Le code de calcul reposant sur la méthodologie décrite au chapitre 3 a déjà fait l'objet de vérifications rigoureuses pour certains cas particuliers. Ainsi, la précision temporelle et spatiale de l'algorithme implicite monolithique a été vérifiée pour le schéma d'intégration en temps de Crank-Nicolson par Étienne *et al.* [174, 176]. En outre, dans une autre publication [128], la précision en temps des intégrateurs implicites de Runge-Kutta (IRK), respectant la GCL, a été vérifiée pour des écoulements instationnaires (sans structure) sur des domaines de calcul fixes et déformables. La vérification a été faite sur des écoulements simples grâce à une solution analytique puis sur une solution manufacturée activant tous les termes des équations de Navier-Stokes grâce à une étude de convergence par raffinement du pas de temps.

Pour une vérification du code de calcul dans le cadre plus général des interactions fluide-structure en grands déplacements, on étudie ici deux problèmes de référence. Tout d'abord, celui d'un profil rigide oscillant induisant d'importante déformation du maillage. On s'intéresse en particulier à la précision temporelle des schémas IRK1, IRK3 et IRK5 grâce à une étude de convergence des forces aérodynamiques par raffinement du pas de temps. Dans un deuxième temps, on étudie le cas d'une languette flexible fixée à l'arrière d'un cylindre carré (cas de Wall [162]). La précision temporelle des schémas implicites de Runge-Kutta sera démontrée par une étude de convergence du déplacement du bout libre de languette en raffinant le pas de temps utilisé. Avant d'attaquer les cas de vérification, on définit les normes d'erreur utilisées

dans le cadre instationnaire pour vérifier la précision de notre méthodologie.

4.1 Définitions des normes d'erreur

Afin d'étudier correctement la précision temporelle des schémas en temps, on doit définir des normes d'erreurs adaptées aux phénomènes instationnaires. Tout d'abord, afin de minimiser l'erreur intrinsèque de la discrétisation en temps, on interpole la solution discrète obtenue par des splines cubiques sur l'intervalle de temps étudié. On peut alors définir une norme d'erreur temporelle basée sur une estimation d'erreur par une moyenne quadratique (*Root Mean Square*, (RMS)). De plus, lorsque les phénomènes vibratoires sont importants, la précision du modèle se mesure non seulement sur l'amplitude des variables dépendantes mais aussi et surtout sur leur fréquence. On définit donc également une norme dans le domaine spectral. Enfin, on rappelle les définitions des normes d'erreur *énergie*, *l2p* et *h1p* pour étudier l'erreur du calcul sur tout le domaine de calcul à un temps t donné.

4.1.1 Interpolation temporelle de la solution

Pour comparer correctement les résultats obtenus par différentes discrétisations en temps Δt_k , on interpole les solutions U_k^h avec des splines cubiques générées par MATLAB sur N points d'interpolation : $[t_1, t_N]$. Ainsi, on utilise la précision des schémas d'intégration en temps (IRK3 et IRK5) pour générer des approximations $U^k(t_i)$ de la solution entre deux temps où la solution est calculée afin de jouir d'une plus grande flexibilité pour le calcul d'erreur. Ceci nous permet de comparer les solutions obtenues par deux calculs avec deux pas de temps différents Δt_1 et Δt_2 même si les temps où les calculs sont effectués sont différents, i.e. $\Delta t_1 \neq q\Delta t_2, \forall q \in \mathbb{N}$ (voir l'exemple présenté sur la figure 4.1).

4.1.2 Domaine temporel

Pour une solution de référence donnée U_{ref} , on définit une norme d'erreur de convergence comme la moyenne quadratique (RMS) de la différence entre la solution calculée interpolée U et la solution de référence à chaque temps de calcul t_i de l'intervalle $[t_1; t_N]$:

$$eRMS = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{(U(t_i) - U_{ref}(t_i))^2}{N}} \quad (4.1)$$

Afin vérifier le plus rigoureusement possible le code de calcul, la solution de référence devrait être la solution exacte, analytique, des équations utilisées. Toutefois, si on ne dispose pas d'une telle solution à cause de la complexité du problème étudié, on utilise la solution

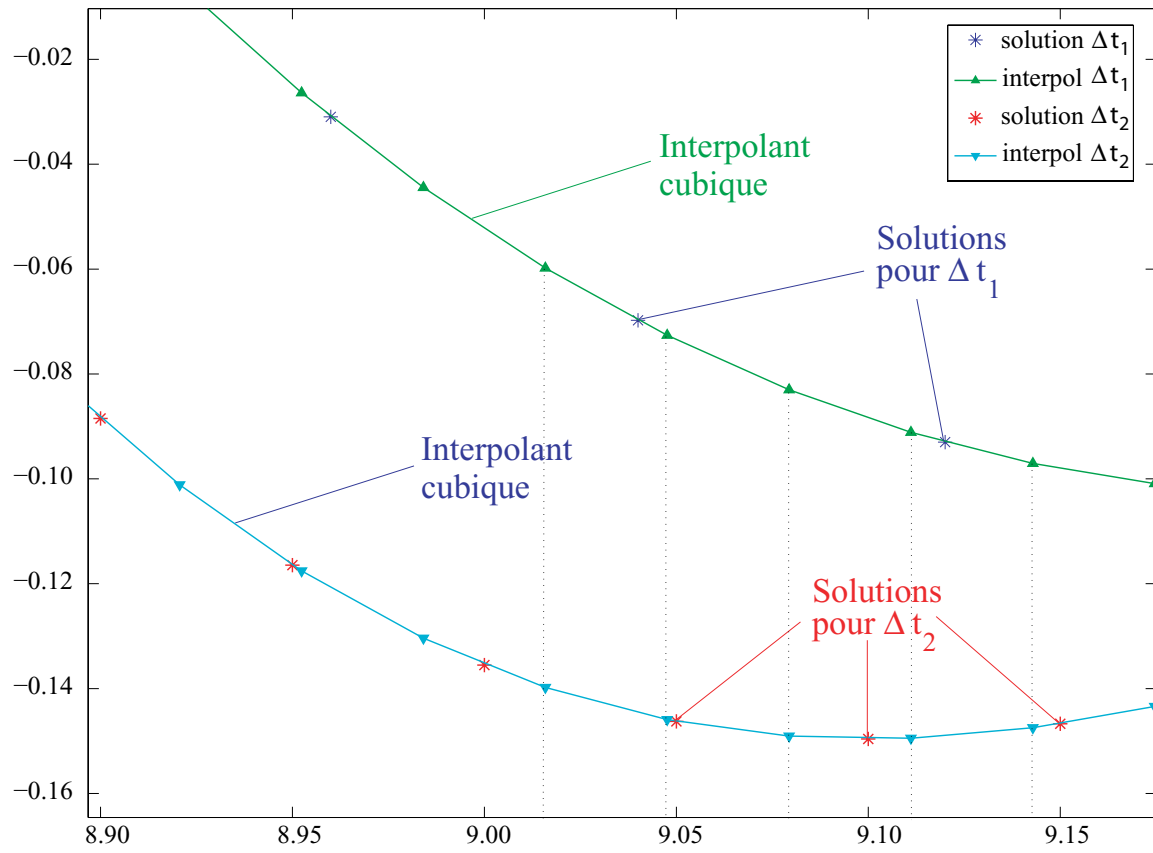


Figure 4.1 Interpolation temporelle de la solution pour 2 pas de temps Δt_1 et Δt_2 .

la plus précise que l'on peut obtenir. Dans le cadre d'une étude de précision en temps, on considère la solution obtenue avec la pas de temps le plus petit et le schéma d'intégration d'ordre le plus élevé. Dans ce cas, il n'y a pas d'interférences dues à la taille du maillage puisqu'un même maillage sera utilisé pendant le processus de vérification. On fait ici l'hypothèse que cette solution précise est très proche de la solution exacte. L'hypothèse sera vérifiée si les courbes de convergence vers cette solution ont des taux de descente prévue par la théorie. Si ce n'est pas le cas, soit le code de calcul n'est pas vérifié, soit la solution précise n'est pas assez proche de la solution exacte. On se heurte alors à un phénomène de saturation de l'erreur.

Cette mesure de l'erreur est appropriée aux problèmes où la fréquence dominante est fixée, par exemple par l'oscillation d'un profil. L'écoulement est alors forcé par la solide, notamment lorsque le phénomène de *lock-in* se produit. Toutefois, les fréquences structurales et celles des lâchers tourbillonnaires intervenant dans les interactions fluide-structure doivent le plus souvent être résolues par le solveur. Ainsi, la précision du schéma d'intégration en temps va aussi s'évaluer dans le domaine spectral.

4.1.3 Domaine spectral

Le passage du domaine temporel au domaine spectral se fait au moyen d'une transformation en série de Fourier à l'aide de la fonction *FFT* (*Fast Fourier Transform*) de MATLAB. On utilise des splines cubiques pour interpoler la solution sur $N = 2^q$ points de l'intervalle de temps considéré et effectuer la décomposition *FFT*. On dispose alors de $N/2 = 2^{(q-1)}$ points de discrétisation dans l'espace des fréquences pour la transformée de Fourier $FFT(U)$.

On utilise la même approche de moyenne quadratique (RMS) pour définir la norme d'erreur dans le domaine spectral. L'erreur spectrale est ainsi calculée sur l'intervalle de fréquence $[f_1; f_{N/2}]$ comme suit :

$$e_{FFT} = \sum_{i=1}^{N/2} \sqrt{\frac{(FFT(U)(f_i) - FFT(U_{ref})(f_i))^2}{N/2}} \quad (4.2)$$

4.1.4 Normes *Énergie*, *L2p* et *H1p*

Pour finir, on rappelle les définitions des normes d'erreur *Énergie*, *L2p* et *H1p* afin d'étudier l'erreur du calcul sur tout le domaine de calcul à un temps t donné. En considérant une solution de référence au temps t , $U_{ref}(t) = [\mathbf{u}_{ref}, p_{ref}]$, on définit les normes comme suit :

– Norme *Énergie* : pour la vitesse

$$\|e_u\|_E^2 = \|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_E^2 = \int_{\Omega} \left[(\nabla \mathbf{u}_{ref} - \nabla \mathbf{u}_h) + (\nabla \mathbf{u}_{ref} - \nabla \mathbf{u}_h)^T \right] : \left[(\nabla \mathbf{u}_{ref} - \nabla \mathbf{u}_h) + (\nabla \mathbf{u}_{ref} - \nabla \mathbf{u}_h)^T \right] d\Omega \quad (4.3)$$

– Norme *L2p* : pour la pression

$$\|e_p\|_{L_2}^2 = \|p_{ref} - p_h\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (p_{ref} - p_h)^2 d\Omega \quad (4.4)$$

– Semi-norme *H1p* : pour la pression

$$\|e_p\|_{H_1}^2 = \|p_{ref} - p_h\|_{H_1}^2 = \int_{\Omega} \nabla (p_{ref} - p_h) \cdot \nabla (p_{ref} - p_h) d\Omega \quad (4.5)$$

où l'indice h définit les solutions éléments finis.

4.2 Profil rigide oscillant

On vérifie tout d'abord le code de calcul sur un cas avec des frontières en mouvement provoquant une déformation du maillage. On considère simplement un profil rigide oscillant en 2D dont les mouvements sont forcés. Il n'existe pas de solution analytique (exacte) à ce problème complexe. On utilise donc une solution obtenue avec la meilleure précision en temps comme solution de référence. Plus précisément, on cherche à vérifier l'implémentation des schémas IRK1, IRK3 et IRK5 par une étude de raffinement du pas de temps. Si l'erreur par rapport à la solution de référence décroît avec des taux égaux aux ordres théoriques des schémas IRK, la vérification sera faite.

4.2.1 Description du cas

On considère une aile rigide oscillante dont la géométrie est décrite par un profil NACA0015 avec une corde unitaire $c = 1.$. Comme souligné dans la revue de littérature, on lui impose l'habituel mouvement périodique de battement et de rotation :

$$\begin{cases} \theta(t) &= \theta_0 \cos(\omega t) \\ h(t) &= h_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

où ω est la pulsation telle que la période s'écrive $T = 2\pi/\omega = 5.55s$ et la fréquence $f = 0.18Hz$. L'angle de rotation moyen θ_{av} est considéré comme nul, l'amplitude de la rotation est définie

par $\theta_0 = \pi/3$. et l'axe de rotation est situé au tiers de la corde : $x_c = 1/3$. Enfin, le battement a une amplitude unitaire $h_0 = 1$. On utilise une fonction lissante jusqu'à $t = 0.6s$ ($e = 2.0$) afin de débiter le mouvement avec une vitesse et une accélération nulles (voir annexe A).

Concernant les propriétés du fluide, on a $\rho_f = 1$. pour sa densité, $U_0 = U_\infty = 1$.corde/s pour sa vitesse en entrée et un nombre de Reynolds $Re = \rho c U_0 / \mu_f = 1100$. Les conditions aux limites sont précisées sur la figure 4.2.

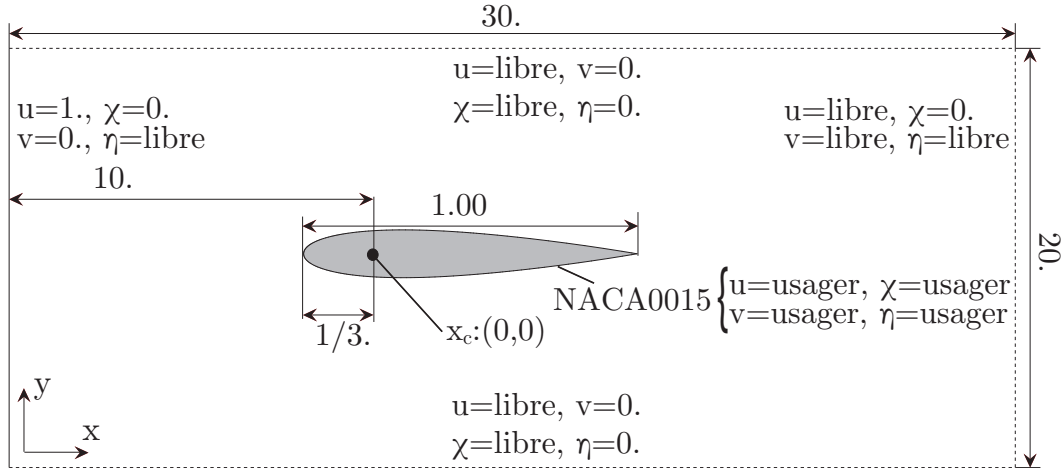


Figure 4.2 Conditions aux limites pour le profil rigide oscillant.

Le maillage utilisé tout au long de cette vérification comporte 10 513 nœuds répartis sur deux zones fluides comme présenté sur la figure 4.3. En effet, comme souligné dans la section 3.3.2, l'approche pseudo-solide permet un zonage du domaine de calcul facilitant les déformations du maillage. Ainsi, on introduit un zone circulaire autour du profil (décrite par le maillage bleu-clair sur la figure 4.3) dont les frontières subissent le même mouvement de corps rigide que le profil afin d'éviter le repliement du maillage. Notons que le petit nombre de nœuds utilisés permet l'étude d'une large gamme de pas de temps en un temps de calcul raisonnable.

4.2.2 Taux de convergence

Afin de mener l'étude de raffinement en pas de temps, on utilise 9 pas de temps différents : $\Delta t_k = \Delta t_0 / 2^k$, $k \in [0, 8]$ où $\Delta t_0 = 0.08s \approx T/70$ et 3 schémas d'intégration en temps : IRK1, IRK3 et IRK5. L'intervalle d'étude est $[0 : 10s]$ afin d'étudier une période d'oscillation après le régime transitoire tout en gardant un temps de calcul raisonnable avec les pas de temps les plus petits. Les résultats de la simulation utilisant le schéma IRK5 et un pas de

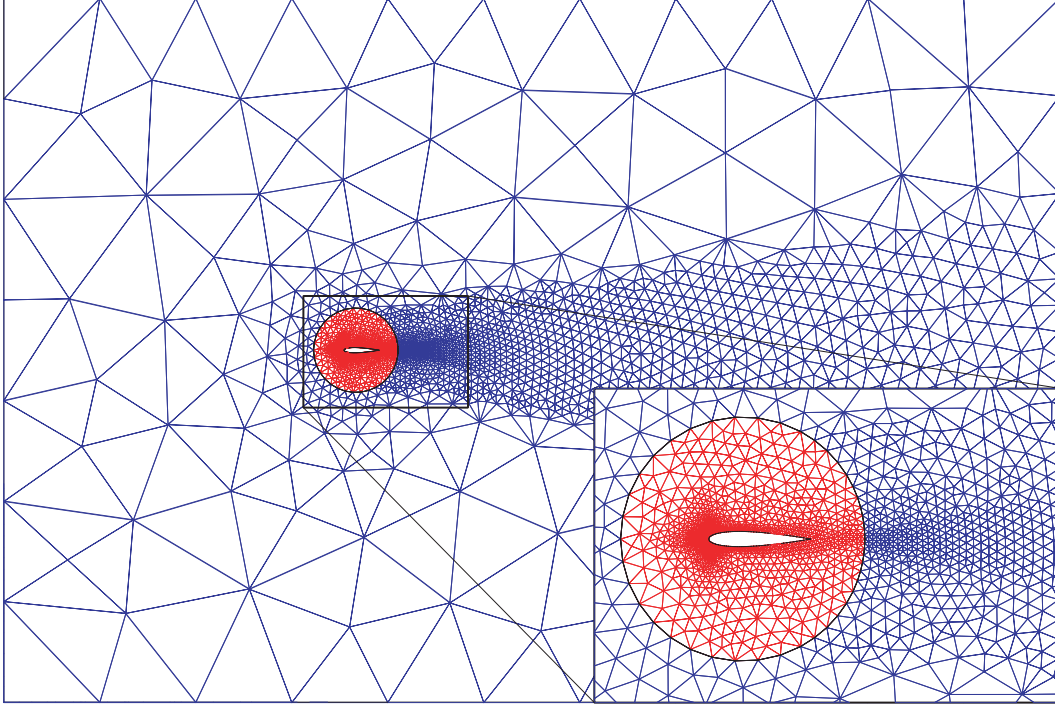


Figure 4.3 Maillage non-déformé - 10 513 nœuds - 2 zones.

temps $\Delta t_7 = \Delta t_0/2^7$ sont utilisés comme solution de référence, représentant la solution exacte.

Efforts aérodynamiques

On étudie la convergence des efforts aérodynamiques s'appliquant sur le profil grâce à la norme d'erreur temporelle $eRMS$. Ainsi, la figure 4.4 présente l'évolution de la norme $eRMS$ de la force verticale F_y sur l'intervalle de temps $[8 - 10s]$ pour les différents pas de temps et les 3 schémas d'intégration (les courbes concernant la force horizontale F_x et le moment M autour de x_p ont la même allure et ne sont pas reproduites pour alléger la figure).

On constate sur la figure 4.4 que les courbes de convergence pour les trois schémas IRK ont une pente constante dès les premiers pas de temps, la zone asymptotique est donc atteinte très rapidement. On peut donc facilement constater que les courbes d'erreur ont des pentes de 1, 2 et 3 respectivement pour les schémas IRK1, IRK3 et IRK5. Ces résultats sont en parfait accord avec les ordres réduits de convergence pour la pression (ordre s), présentés dans la section 3.4.2. En effet, les forces aérodynamiques sont induites tant par le gradient des vitesses que par la différence de pression. Dans l'approche adoptée (voir section 3.5.3), les forces sont calculées implicitement grâce à la méthode des réactions. Ces dernières sont

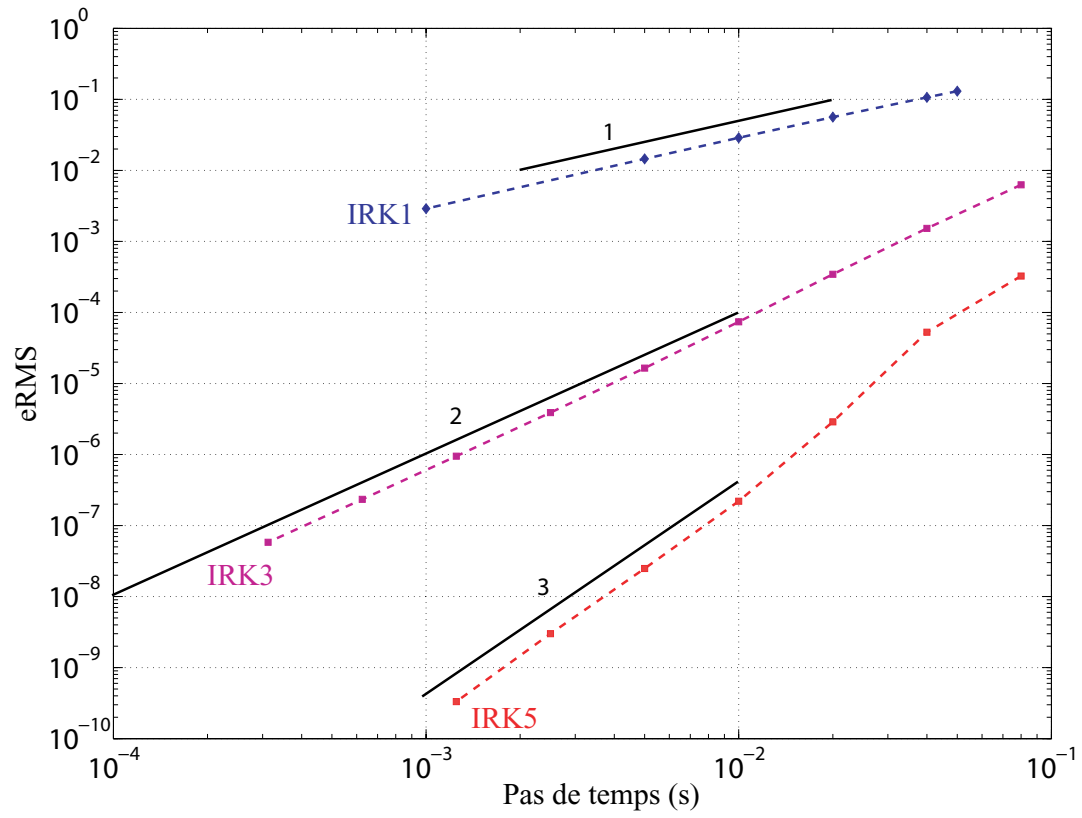


Figure 4.4 Convergence de l'erreur temporelle $eRMS$ sur la force verticale F_y pour $t \in [8-10s]$.

donc résolues par couplage avec les vitesses du fluide et le champ de pression. D'un point de vue numérique, il semble donc aussi cohérent de retrouver les taux de convergence de la pression.

En outre, on a remarqué une légère variation des taux de convergence des courbes d'erreur selon l'intervalle de temps considéré. Le tableau 4.1 résume les ordres de convergence observés pour les 3 schémas de Runge-Kutta étudié pour 5 intervalles de temps différents. On voit une convergence des ordres très rapide vers les valeurs qu'on vient d'exposer pour l'intervalle $[8 - 10s]$. Seul le schéma IRK5 a des ordres de convergence qui varient fortement sur les 2 premiers intervalles de temps présentés, qui contiennent le régime transitoire. On pourrait supposer que le problème devient plus raide à cause des phénomènes transitoires et qu'on a donc une réduction d'ordre mais c'est le contraire qui se produit pour le 2e intervalle. Par contre, on note que la variation de l'ordre de IRK5 en fonction des intervalles en temps est semblable à celle en fonction du pas de temps présenté par la figure 4.4. Ainsi, on peut supposer que la zone asymptotique de IRK5 n'est pas atteinte avec les pas de temps étudiés pour le régime transitoire générant des phénomènes de plus hautes fréquences. Le 2e intervalle de temps coupant une partie du régime transitoire par rapport au premier, il est normal qu'on se rapproche de la zone asymptotique avec les même pas de temps et qu'on obtienne donc un ordre de convergence autour de 4 comme sur la figure 4.4. À partir du 3e intervalle, le régime transitoire est passé et on se retrouve donc dans la zone asymptotique avec un ordre de convergence de 3. Cette explication a l'avantage de s'appliquer aussi aux schémas IRK1 et IRK3 qui voient leurs taux de convergence restaient sensiblement constants alors que la figure 4.4 montre qu'ils atteignent leurs zones asymptotiques dès le premier pas de temps.

Intervalle	0-10s	2-10s	4-10s	6-10s	8-10s
IRK1	0.96	0.95	0.95	0.98	1.00
IRK3	2.02	2.09	2.01	2.01	2.05
IRK5	1.57	4.05	3.09	3.10	3.12

Tableau 4.1 Ordres de convergence de l'erreur $e_{RMS}(F_y)$ des schémas IRK.

Variables de l'écoulement

Pour confirmer le rôle de la pression sur la précision des schémas IRK, on s'intéresse à la convergence des variables de l'écoulement : champs de vitesses et de pression dans le domaine fluide. Les variables sont évaluées au temps final $t = 10s$ et on utilise les normes d'erreur présentées à la section 4.1.4. Les courbes de convergence de l'erreur spatiale pour les

normes $\dot{Energie}$, $L2p$ et $H1p$ sont présentées sur la figure 4.5. On remarque tout d'abord le faible taux de convergence des courbes d'erreur pour le schéma IRK1, mais les trois normes ont un comportement similaire comme prédit par la théorie : premier ordre pour les vitesses et la pression. Les courbes concernant les schémas IRK3 et IRK5 sont plus intéressantes pour évaluer le rôle de la pression sur la précision des schémas d'intégration en temps. On observe en effet que les normes d'erreur concernant la pression ($L2p$ et $H1p$) décroissent moins rapidement que la norme $\dot{Energie}$ pour la vitesse dans les zones asymptotiques respectives des schémas IRK, identiques à celles trouvées pour lors de l'étude des efforts aérodynamiques.

Normes	$\dot{Energie}$	L2p	H1p	
IRK1	0.6899	0.7196	0.7026	a
	0.5904	0.5985	0.5861	b
	0.5069	0.5249	0.4861	c
IRK3	2.9995	2.2950	2.1304	a
	2.9991	2.4505	2.2231	b
	2.9980	2.5832	2.3461	c
IRK5	5.0386	3.1309	3.1699	a
	5.0130	3.2481	3.1013	b
	4.9967	3.6339	3.1228	c

Tableau 4.2 Ordres de convergence de l'erreur spatiale pour les normes $\dot{Energie}$, $L2p$ et $H1p$ pour les schémas IRK à $t = 10s$.

Plus précisément le tableau 4.2 résume les taux de convergence des courbes calculés entre le dernier point de chaque courbe et : a) l'avant-dernier point, b) l'antépénultième point et c) l'avant-avant-dernier point. On note ainsi des ordres de précisions optimums pour la norme $\dot{Energie}$ à la fois pour IRK3 et IRK5 avec des taux de convergence très proches de 3.0 et 5.0 respectivement. La précision en temps des schémas IRK sur la vitesse est donc vérifiée. En outre, les normes d'erreur $L2p$ et $H1p$ font apparaître clairement la réduction d'ordre pour la pression (multiplicateur de Lagrange) soulignée à la section 3.4.2. On obtient ainsi des taux de convergence d'environ 2.3 pour le schéma IRK3 et d'environ 3.2 pour le schéma IRK5. La précision en temps théorique des schémas implicites de Runge-Kutta est donc vérifiée à la fois pour les vitesses et pour la pression. De plus, le rôle de la pression est ainsi confirmé dans la réduction de la précision des schémas d'intégration en temps pour les efforts aérodynamiques.

4.2.3 Efficacité des schémas IRK

L'implémentation du code est ainsi vérifiée sur le cas du profil oscillant présentant des frontières en mouvement et de fortes déformations du maillage. Le 3e niveau de respect

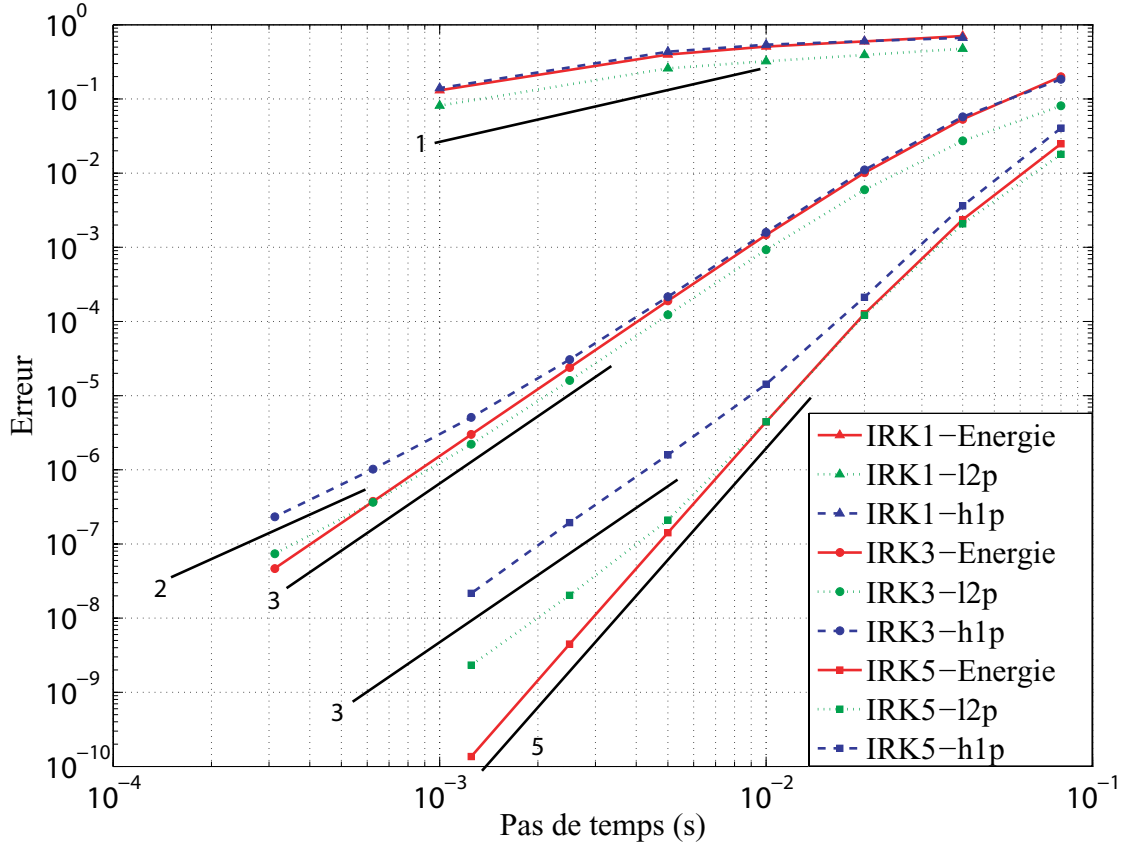


Figure 4.5 Convergence de l'erreur spatiale pour les normes $\dot{Energie}$, $L2p$ et $H1p$ pour les schémas IRK à $t = 10s$.

de la loi de conservation géométrique (GCL) présenté à la section 2.3 est donc vérifié. On obtient bien les ordres élevés de précision en temps prévus par la théorie pour les schémas implicites de Runge-Kutta. En pratique toutefois, l'évaluation de la solution à chaque pas de temps requiert plus de mémoire pour les schémas d'ordres élevés. En effet, l'espace mémoire requis pour IRK3 est doublé par rapport à IRK1 et triplé pour IRK5. Le nombre d'inconnues augmentant, chaque évaluation est aussi plus chère en termes de temps CPU si on utilise des schémas d'ordres élevés. Cependant, la grande précision en temps apportée par des schémas d'ordres élevés permet d'utiliser des pas de temps plus grands pour le même niveau de précision et ainsi de diminuer le nombre total d'évaluations sur un intervalle de temps donné. Pour comparer l'impact des ces deux effets contradictoires, on a évalué le temps de calcul réel (sur une même machine) nécessaire pour effectuer les calculs présentés jusqu'ici. Les temps résultants sont tracés sur la figure 4.6 en fonction de la précision obtenue sur l'intervalle de temps $[2 - 10s]$. On observe ainsi que les schémas IRK3 et IRK5 sont moins couteux que IRK1 en termes de temps de calcul quelque soit la précision désirée. D'ailleurs, on voit clairement les limites du schéma IRK1 qui rend impossible des calculs précis en un temps raisonnable. Ainsi, pour une précision de 10^{-6} , le calcul avec IRK3 nécessite un peu moins d'un jour et demi alors qu'on peut estimer par extrapolation que le calcul avec IRK1 nécessiterait près de deux ans ! Enfin, le schéma d'ordre 5, IRK5, devient intéressant comparé à IRK3 pour des simulations précises, si on dispose d'un espace mémoire suffisant.

L'étude du cas d'un profil rigide oscillant a permis de vérifier la bonne implémentation du code de calcul et de confirmer la grande efficacité des schémas implicites de Runge-Kutta d'ordres élevés pour les simulations précises, même avec des frontières en mouvement et de fortes déformations du maillage. Le 3e niveau de respect de la loi de conservation géométrique (GCL) est donc aussi vérifié.

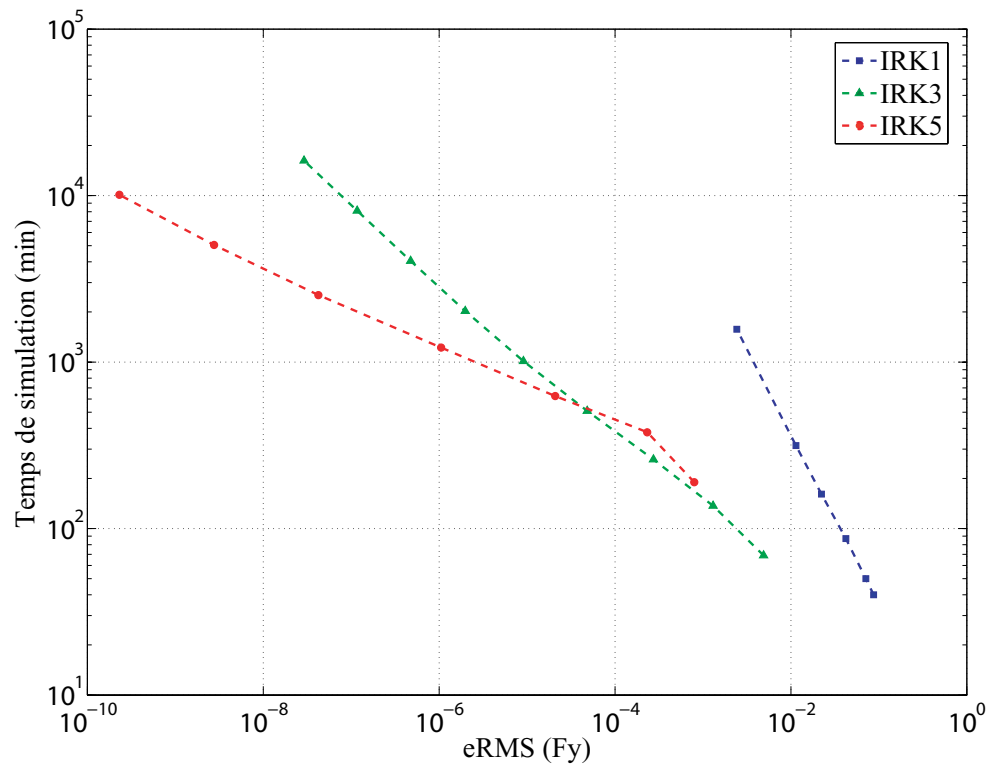


Figure 4.6 Temps de simulation réels des schémas IRK (en min).

4.3 Languelette flexible encastrée

Le couplage monolithique du fluide avec une structure flexible est ici vérifié sur le cas d'une languelette flexible encastrée à l'arrière d'un cylindre carré. Ce problème présente une forte interaction entre le fluide et la structure qui se déforme grandement. Comme pour le cas précédent, la complexité des phénomènes mis en jeu requiert la substitution de la solution exacte par une solution calculée avec précision. Une étude de raffinement du pas de temps permet de vérifier la bonne implémentation du couplage IFS et des schémas IRK, si l'erreur par rapport à la solution de référence décroît avec des taux égaux aux ordres théoriques des schémas IRK (voir section 3.4.2).

4.3.1 Description du problème

On reprend ici l'exemple de référence présenté par Wall en 1999 [162] et décrit plus en détail à la section 5.1. Il s'agit d'une languelette flexible encastrée à l'arrière d'un cylindre carré soumis à un écoulement fluide uniforme. A cause des lâchers tourbillonnaires du cylindre, la languelette subit de fortes oscillations induites par le fluide. La géométrie du problème et les conditions aux limites utilisées sont décrites sur la figure 4.7. Sur les frontières du cylindre, on peut autoriser un glissement libre du pseudo-solide afin de faciliter la déformation du maillage (soit 0, soit *libre*). Les conditions d'interface sont traitées de manière implicite.

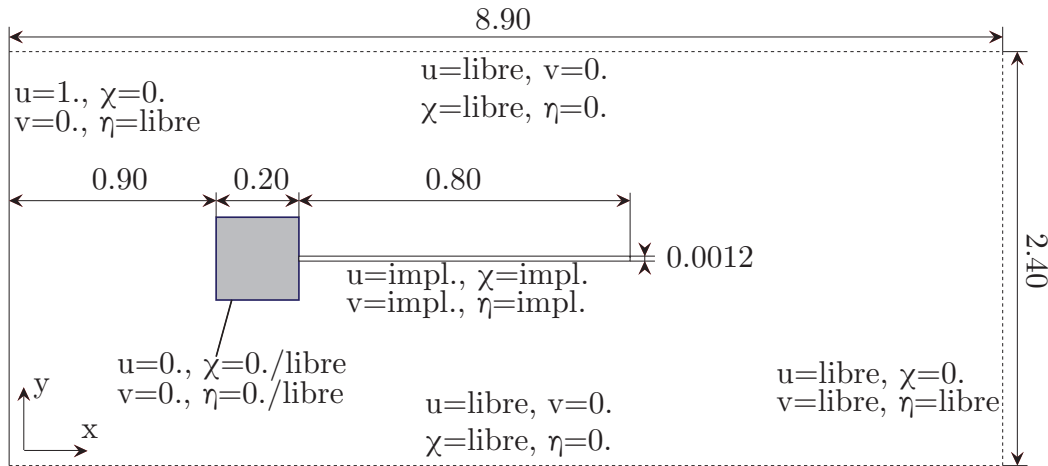


Figure 4.7 Géométrie et conditions aux limites pour la languelette flexible encastrée.

Les paramètres du problème sont adimensionalisés de manière consistante (voir section 5.1 pour plus de détails) et ont les valeurs suivantes :

Longueurs	Fluide	Structure
Carré : $d = 0.20$	Vitesse : $U_{\infty} = 1.00$	Poisson : $\nu = 0.35$
Totale : $L = 1.00$	Densité : $\rho_f = 1.00$	Densité : $\rho_s = 1\ 695$
Épaisseur : $e = 0.012$	Viscosité : $\mu_f = 98.10^{-4}$	Young : $E = 1\ 708\ 153$

Le nombre de Reynolds est donc : $Re=204$. La structure est modélisée par la loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff pour modéliser correctement les grands déplacements. Le calcul instationnaire démarre à partir d’une solution stationnaire. Enfin, le maillage utilisé comporte 10 179 nœuds et est présenté sur la figure 4.8. Encore une fois, le faible nombre de nœuds permet une bonne étude de raffinement en pas de temps en un temps de calcul raisonnable.

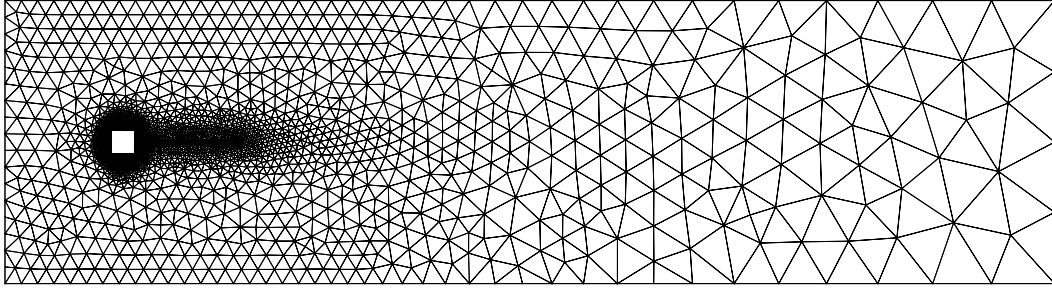


Figure 4.8 Maillage non-déformé pour la languette flexible encastrée - 10179 nœuds.

4.3.2 Taux de convergence

Ce problème va permettre de vérifier l’implémentation des schémas d’intégration de Runge-Kutta du premier au cinquième ordre pour les interactions fluide-structure en grands déplacements. On étudie la convergence des déplacements horizontaux et verticaux de l’extrémité libre de la languette, représentatifs des forts effets de couplage entre le fluide et la structure. Comme les déformations structurelles de la languette sont uniquement le fruit des interactions avec le fluide (aucune imposition de mouvement), tant l’amplitude que la fréquence des déplacements de l’extrémité libre vont être calculés par le code. Ainsi, la vérification se fera tant dans le domaine temporel, avec la norme $eRMS$, que spectral, avec la norme $eFFT$.

On considère trois intervalles de temps pour effectuer l’étude du taux de convergence des IRK : $I_1 = [10s; 25s]$, $I_2 = [0; 10s]$ et $I_3 = [0; 15s]$. Le premier correspond à celui communément utilisé dans les précédents travaux portant sur ce problème IFS [3]. Les deux autres intervalles, plus courts, sont utilisés pour étudier l’ordre de convergence du schéma

IRK du 5^e ordre et les possibles effets de saturation. Selon les intervalles, on utilise jusqu'à 7 pas de temps différents tels que : $\forall i \in [1, 6], \Delta t_i = \Delta t_0 / 2^{i-1}$ avec $\Delta t_0 = 4.10^{-2}$ s et $\Delta t_7 = 5.10^{-4}$ s. La solution de référence va alors aussi variée selon l'intervalle d'étude.

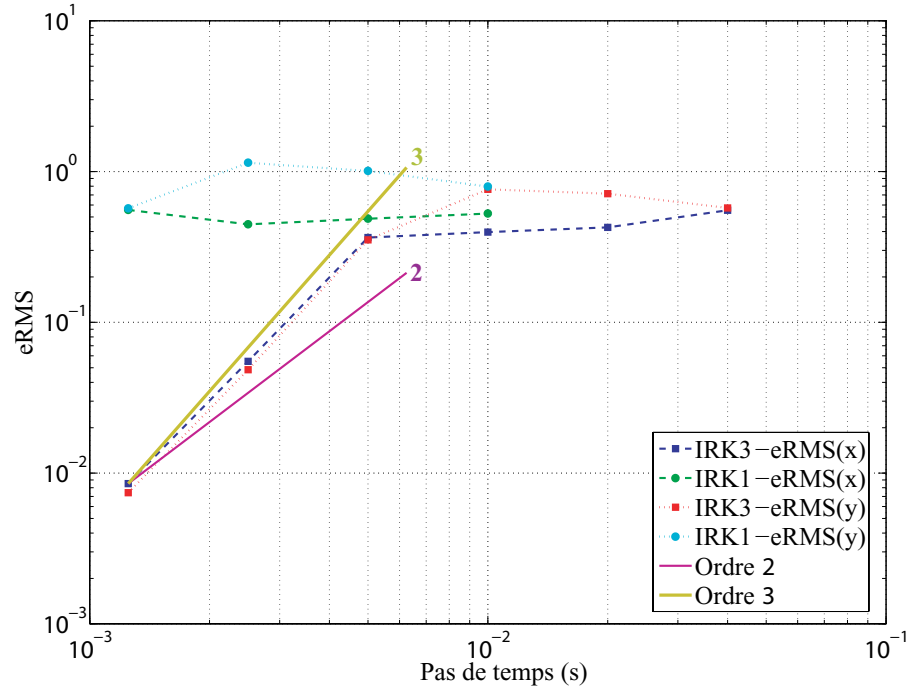
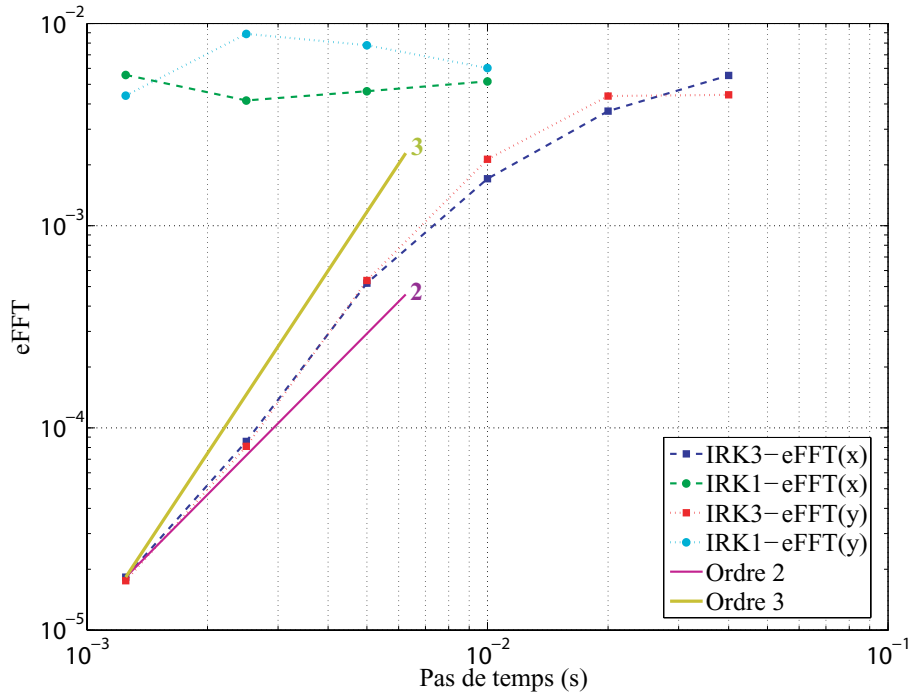
Vérification de IRK1 et IRK3 sur I_1

La figure 4.9 présente l'évolution des normes d'erreurs e_{RMS} et e_{FFT} pour les déplacements (x,y) de l'extrémité libre de la languette sur l'intervalle de temps $I_1 = [10s; 25s]$. La solution de référence est obtenue avec un schéma en temps IRK3 et le pas de temps $\Delta t_7 = 5.10^{-4}$ s. On prend $N_1 = 2^{16}$ points de discrétisation pour calculer l'erreur e_{RMS} et la transformée de Fourier des solutions calculées avec les différents pas de temps. Sur la gamme de pas de temps étudiés, le schéma IRK du premier ordre délivre un taux de convergence vraiment faible, même plus petit que le taux théorique de 1. Ainsi, on peut supposer que la zone asymptotique de ce schéma IRK1 commencer pour des pas de temps Δt bien inférieurs à 10^{-3} s. De plus, l'erreur est vraiment importante dans le domaine spectral (figure 4.9.b) et semble rester constante parce que cet intégrateur en temps IRK1 capture la mauvaise fréquence de vibration structurelle comme souligné dans le section 5.1.

Pour le schéma IRK du 3^e ordre, on note que la zone asymptotique de convergence commence vers $\Delta t = 5.10^{-3}$ s (notamment avec la norme e_{RMS}) et le taux de convergence est alors très proche du taux théorique de 3. Toutefois, dans le domaine spectral, on observe un taux réduit autour de 2.5. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que le schéma IRK3 n'est que du second ordre pour la pression, bien qu'il soit du 3e ordre pour la vitesse et les déplacements. En effet, les déplacements de l'extrémité libre sont dus en partie aux forces de pression agissant sur la structure, ce qui pourrait détériorer le taux de convergence observé. En conclusion, le schéma IRK3 est correctement implémenté et offre un avantage indéniable de précision en temps sur le schéma d'Euler implicite (IRK1).

Vérification de IRK3 et IRK5 sur I_2 et I_3

L'utilisation de l'intégrateur en temps IRK du 5^e ordre améliore très visiblement les résultats obtenus. Les figures 4.10 et 4.11 montrent l'erreur de calcul sur les déplacements (x,y) de l'extrémité libre respectivement pour les intervalles $I_2 = [0; 10s]$ et $I_3 = [0; 15s]$. On utilise dans les deux cas, les résultats d'une simulation obtenus avec le schéma IRK5 et le pas de temps : $\Delta t_6 = 1.25.10^{-3}$ s. On considère en outre, $N_2 = 2^{16}$ et $N_3 = 2^{17}$ points de discrétisation sur chaque intervalle de temps. On observe que le taux de convergence de IRK3

a) Domaine temporel : $eRMS$.b) Domaine spectral : $eFFT$.Figure 4.9 Convergence des déplacements (x,y) de l'extrémité libre pour $t \in [10; 25s]$.

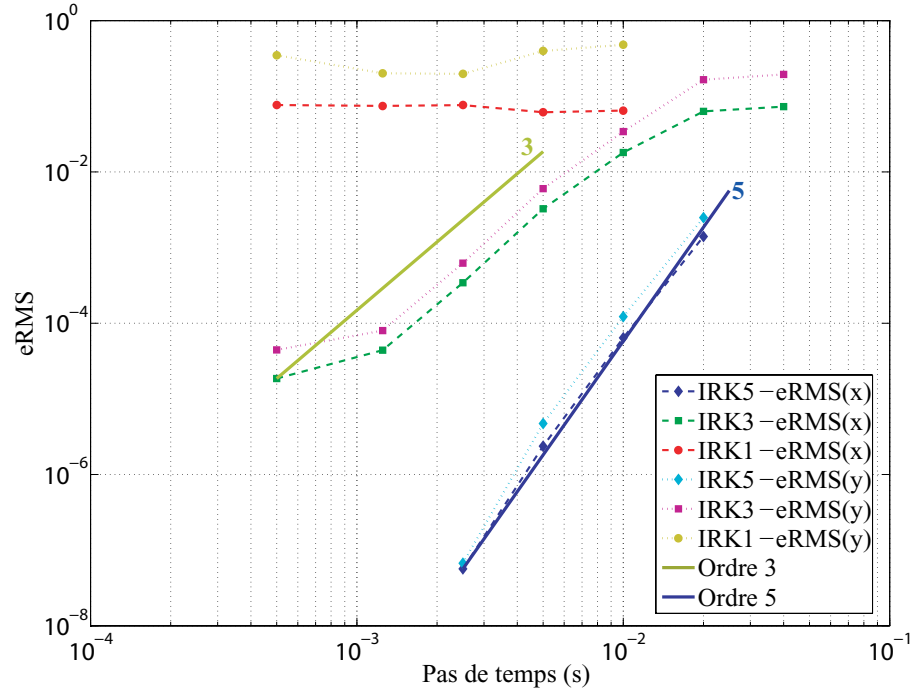
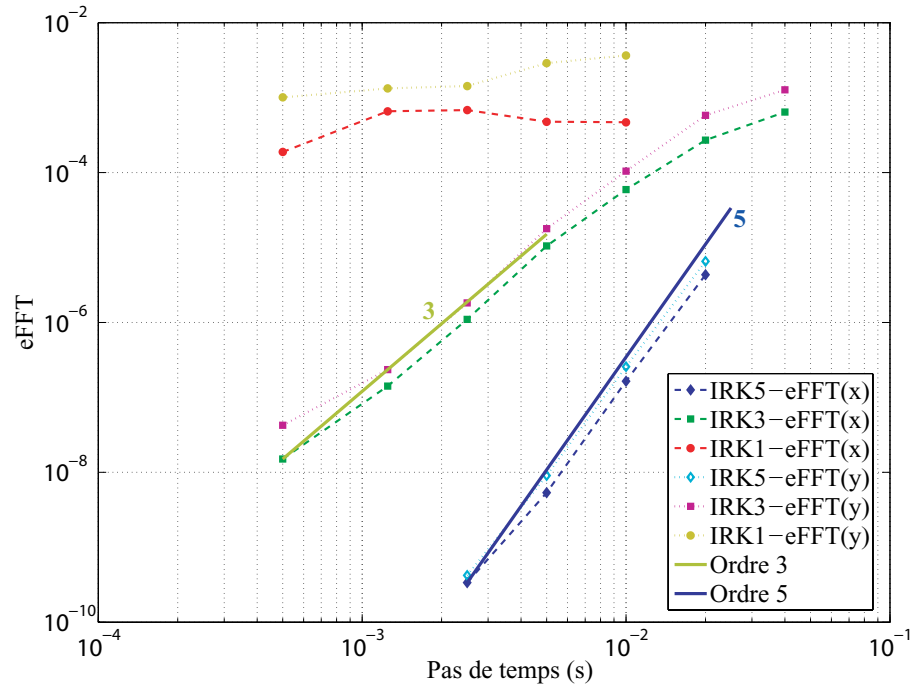
est globalement confirmé sur les deux intervalles de temps même si des effets de saturation semblent apparaître sur le dernier point (pas de temps le plus petit). On peut très clairement voir cet effet de saturation avec la norme $eRMS$ sur l'intervalle de temps le plus court I_2 (voir figure 4.10.a) tandis que le taux de convergence reste égal à 3 jusqu'au dernier pas de temps sur l'intervalle I_3 dans le domaine spectral (voir figure 4.11.b). Cet effet peut venir du manque de précision de la solution de référence, substitut de la solution exacte. Cette hypothèse tend à être confirmée par d'autres calculs (non présentés ici), puisque l'effet de saturation empire lorsqu'on utilise les résultats obtenus avec un schéma IRK3 comme solution de référence.

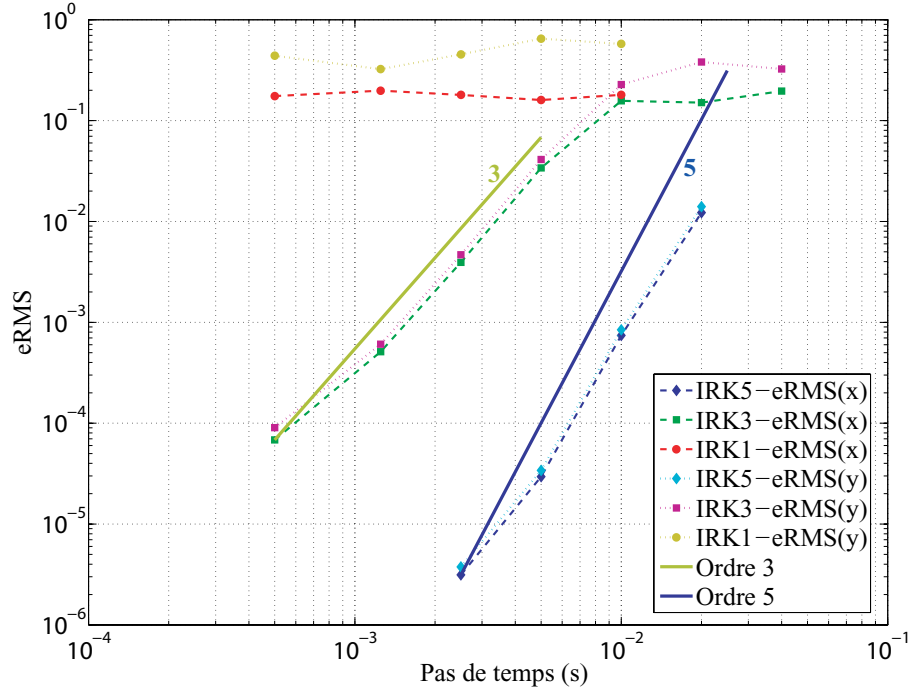
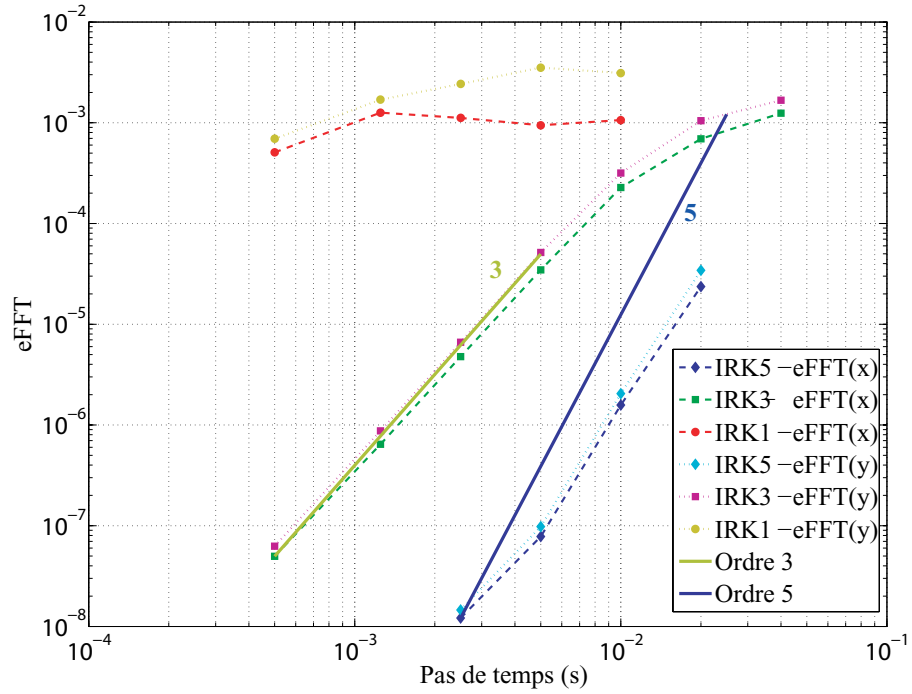
Concernant le schéma du 5^e ordre, son taux de convergence est vraiment proche de 5, tout comme prévu par la théorie, sur l'intervalle de temps $I_2 = [0; 10s]$. Contrairement au schéma IRK3, c'est sur l'intervalle I_3 qu'une saturation apparaît sur le dernier point. De plus, le taux de convergence sur cet intervalle est plus proche de 4.5 que de 5. Ceci peut facilement être expliqué par les effets des forces de pression qui sont résolues avec un ordre réduit de 3 pour les schémas IRK5. Ce schéma IRK d'ordre élevé reste toutefois très efficace puisque sa zone asymptotique est atteinte dès le premier pas de temps étudié ($\Delta t = 2.10^{-2}s$). De plus, sa précision est 4 fois meilleure que celle de IRK3 dès le début de la zone asymptotique (*i.e.* $\Delta t_0 = 10^{-2}$). Avec ce pas de temps, le schéma IRK5 est aussi précis que le schéma IRK3 avec un pas de temps $\Delta t = 5.10^{-3}s$. A partir de là, dans la zone asymptotique, l'écart de précision s'accroît avec un taux de 5/3.

4.3.3 Discussion

Les taux de convergence des schémas IRK de 3^e et 5^e ordres, obtenus pour le problème IFS étudié ici, sont vraiment proches de ceux prévus par la théorie ce qui vérifie le code de calcul pour les interactions fluide-structure en grands déplacements. Ces schémas d'ordre élevés en temps apportent une amélioration significative sur la précision des calculs même si l'évaluation de la solution pour un pas de temps est plus coûteuse. Ainsi, pour un même niveau de précision en temps, les schémas d'ordres élevés utilisent des Δt de plus en plus grands et donc le nombre d'évaluations de la solution diminue d'autant, surcompensant le coût plus important pour une évaluation. Le résultat net est une réduction du temps de calcul total.

Toutefois, le taux de convergence peut se dégrader dans certains cas. On suppose qu'il y a deux origines possibles : le manque de précision de la solution de référence (ce qui dans ce cas n'influence pas l'ordre réel du schéma d'intégration en temps) et le rôle des forces de pression sur les mouvements de la languette. Pour confirmer la première hypothèse, des simulations avec une plus grande précision devraient être menées bien que cela nécessite

a) Domaine temporel : $eRMS$.b) Domaine spectral : $eFFT$.Figure 4.10 Convergence des déplacements (x,y) de l'extrémité libre $t \in [0; 10s]$.

a) Domaine temporel : $eRMS$.b) Domaine spectral : $eFFT$.Figure 4.11 Convergence des déplacements (x,y) de l'extrémité libre $t \in [0; 15s]$.

un temps de calcul de plus en plus important. La seconde origine est plus complexe à vérifier car impliquant les fondements théoriques de la méthodologie de calcul (et non la méthode de vérification). On doit en effet déterminer l'impact de l'ordre réduit de précision en temps pour la pression (seulement 2 pour IRK3 et 3 pour IRK5) sur la précision pour les déplacements de l'extrémité libre de la languette. Il semble évident que physiquement la pression joue un rôle majeur dans la déformation de la languette mais numériquement les taux de convergence des erreurs sur les déplacements de l'extrémité libre ne sont pas réduits à ceux de la pression.

4.4 Profil autopropulsé

Pour compléter la vérification du code de calcul, il reste à mettre en œuvre les équations de masse ponctuelle. On s'intéresse alors au cas d'un profil autopropulsé, *i.e.* qui avance librement grâce à la poussée aérodynamique produite par son mouvement oscillant. Une étude préliminaire de raffinement du pas de temps permet de vérifier la bonne implémentation des équations de masse ponctuelle couplées avec celles de l'écoulement fluide pour le schéma IRK3. La convergence de l'erreur par rapport à une solution précise prise comme référence confirmera l'ordre de précision en temps du code de calcul.

4.4.1 Description du problème

Le problème étudié est semblable à celui présenté à la section 4.2 avec $f = 0.18\text{Hz}$ et $\theta_0 = \pi/3$. La seule différence consiste en l'introduction d'une masse ponctuelle, située sur l'axe de rotation, permettant le mouvement libre du profil selon l'axe horizontal (aucune liberté sur l'axe vertical). Ainsi, les mouvements de battement et de rotation sont identiques mais dans un repère en mouvement avec une vitesse u_{mp} et lié à la position x_{mp} de la masse ponctuelle. Les coordonnées $(x(t), y(t))$ et la vitesse $(u(t), v(t))$ d'un point du profil au temps t s'écrivent, à partir de ses coordonnées initiales (x_e, y_e) , par combinaison d'un mouvement imposé et d'un mouvement libre :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_{mp}(t) + (\cos(\theta(t))x_e - \sin(\theta(t))y_e) \\ y(t) = (\cos(\theta(t))y_e + \sin(\theta(t))x_e) + h(t) \\ u(t) = u_{mp}(t) - \frac{d\theta(t)}{dt} (\sin(\theta(t))x_e + \cos(\theta(t))y_e) \\ v(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} (-\sin(\theta(t))y_e + \cos(\theta(t))x_e) + \frac{dh(t)}{dt} \end{array} \right.$$

x_{mp} et u_{mp} sont les variables dépendantes de la masse ponctuelle qui doivent être résolues. Pour le mouvement imposé, on utilise la même fonction lissante jusqu'à $t = 0.6\text{s}$ (voir annexe A) et on considère :

$$\left\{ \begin{array}{lll} f = 0.18\text{Hz}, & T = 5.55\text{s}, & h_0 = 1/5c \\ \theta_0 = \pi/8., & \theta_{av} = 0, & x_c = 1/3c \end{array} \right.$$

Le solide est modélisé par la masse ponctuelle telle que $m = 0.30$ (*i.e.* la densité du solide est environ 2.5 fois ρ_f) et pour le fluide on conserve $\rho_f = 1$. et $\mu_f = 1./1100$. Par contre, les conditions aux limites changent afin de prendre en compte le mouvement du profil. Ainsi, on

considère ici $U_0 = U_\infty = 0$. pour la vitesse du fluide en entrée et on autorise le mouvement horizontal de toutes les frontières fluides comme indiqué sur la figure 4.12.

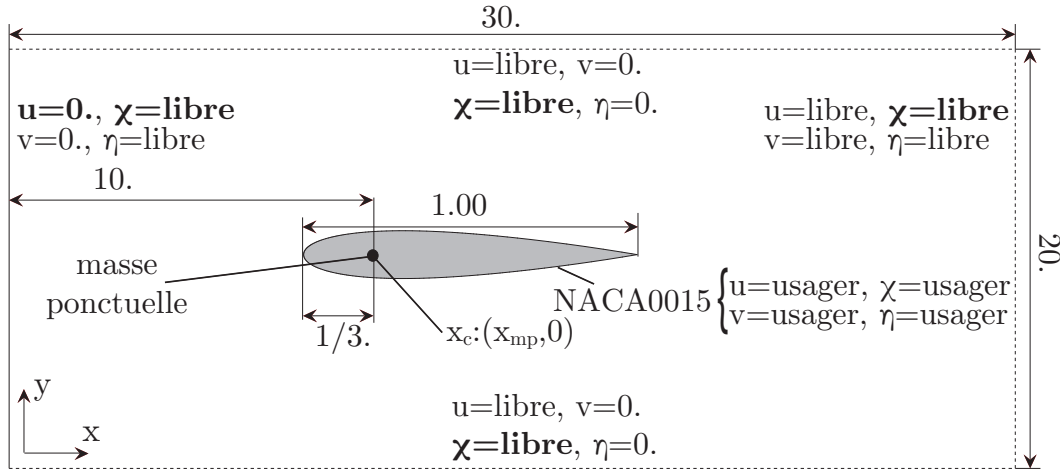


Figure 4.12 Conditions aux limites pour le profil autopulsé.

On utilise le même maillage comportant 10 513 nœuds présenté sur la figure 4.3 mais avec une seule zone fluide car l'angle de rotation est assez faible.

4.4.2 Taux de convergence

On a mené une étude préliminaire de raffinement du pas de temps pour le schéma d'intégration en temps IRK3. On utilise 6 pas de temps différents : $\Delta t \in [\Delta t_0/2^5, \Delta t_0]$ où $\Delta t_0 = 9T/125 \approx T/14$. L'intervalle d'étude est $I = [0 : 100s] = [0 : 18T]$. Les résultats de la simulation utilisant le plus petit pas de temps $\Delta t = 9T/4000$ sont utilisés comme solution de référence, représentant la solution exacte.

Mouvement de la masse ponctuelle

On étudie la convergence des deux variables dépendantes spécifiques aux mouvements de la masse ponctuelle x_{mp} et u_{mp} grâce aux normes d'erreur temporelle $eRMS$ et spectrale $eFFT$. Le déplacement x_{mp} et la vitesse u_{mp} de la masse ponctuelle (i.e. du centre de rotation du profil) sont représentés sur la figure 4.13. On note U_{avg} la vitesse moyenne de la masse ponctuelle (en régime établi) et x_{max} la distance maximale parcourue depuis $t = 0$. Le tableau 4.3 expose la convergence du calcul sur u_{avg} (en corde/s) et x_{max} (en corde) estimés sur l'intervalle $I=[20 : 50s]$ grâce à $N=2^{17}$ points d'interpolation. Les erreurs relatives (*erreur rel.*) sont calculées par rapport à la solution obtenue pour $\Delta t_0/32$. On trace les erreurs relatives sur la vitesse et le déplacement sur la figure 4.14 avec une échelle logarithmique.

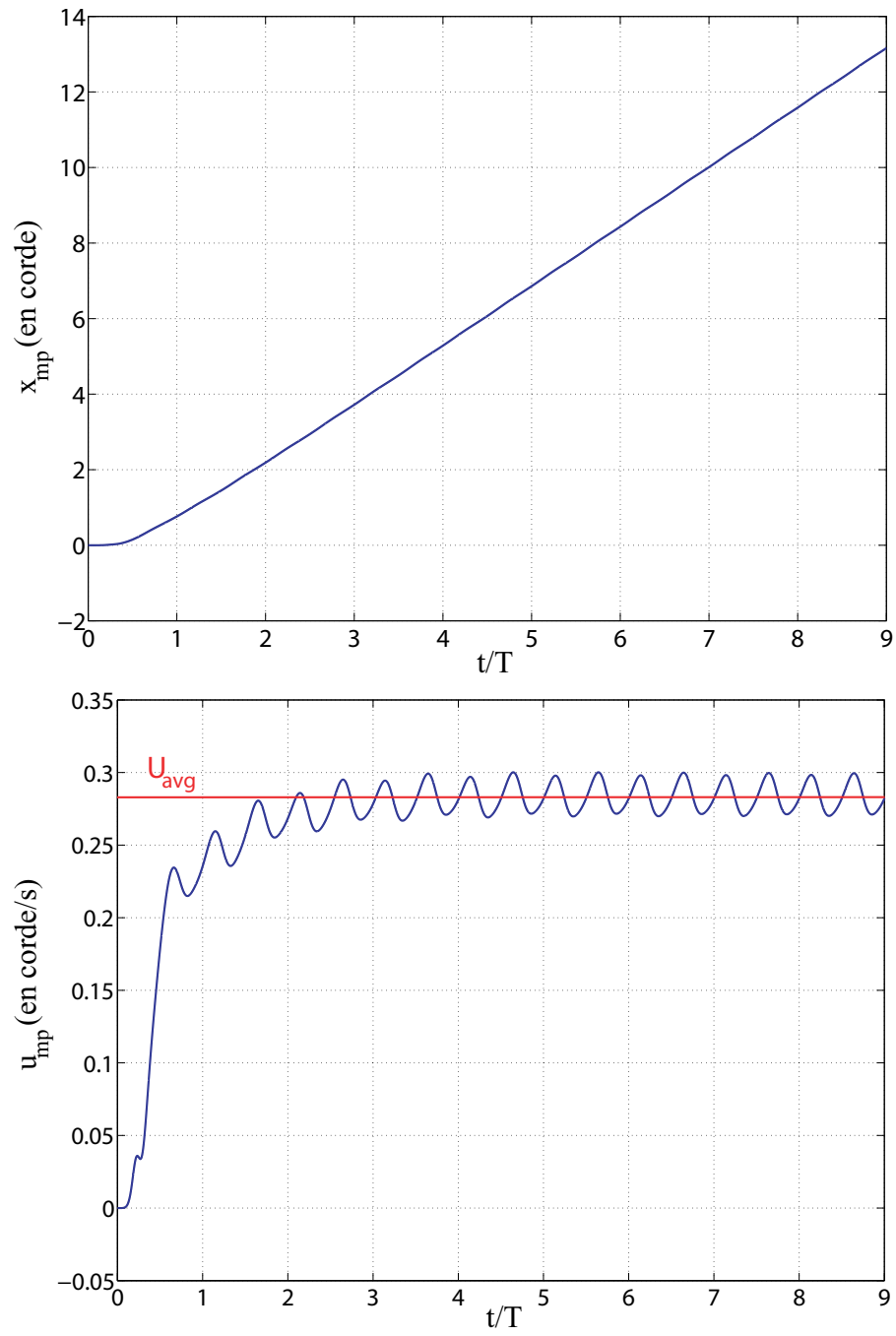


Figure 4.13 Déplacement x_{mp} et vitesse u_{mp} de la masse ponctuelle pour $t \in [0 : 50s]$ et $\Delta t = 9T/4000$.

On observe alors que les deux erreurs convergent avec une pente d'ordre 3, *i.e.* en $\mathcal{O}(\Delta t^3)$. On retrouve ainsi le taux de convergence théorique du schéma d'intégration en temps IRK3 pour les vitesses et déplacements.

Concernant les variables instationnaires $u_{mp}(t)$ et $x_{mp}(t)$, on constate aussi, sur la figure 4.15, que l'ordre théorique de précision en temps du schéma IRK3 est maintenu sur l'intervalle $I = [20 : 50s]$ ($N=2^{17}$ points d'interpolation). En effet, les courbes de convergence des erreurs temporelle et spectrale ont une pente de 3 aussi bien pour le déplacement que pour la vitesse. La zone asymptotique est atteinte dès le premier pas de temps et les taux de convergence sont conservés sur les différents intervalles de temps considérés comme le montre le tableau 4.4, où ils sont calculés sur les 3 derniers pas de temps.

Efforts aérodynamiques

Comme lors de l'étude du profil oscillant (voir section 4.2), on observe un ordre de précision en temps réduit du schéma IRK3 pour les efforts aérodynamiques comme l'indique la figure 4.16. Les courbes de convergence des erreurs temporelle et spectrale semblent en effet avoir un ordre plus proche de 2. que de 3., aussi bien pour F_x que pour F_y . En effet, l'influence de la précision réduite sur la pression engendre des taux de convergence réduits autour de 2.2 pour les efforts aérodynamiques. La zone asymptotique est encore atteinte dès le premier pas de temps sauf pour l'erreur spectrale sur F_y où elle démarre au deuxième pas de temps. Les taux de convergence sont ici aussi constants sur les différents intervalles de temps considérés comme le montre le tableau 4.5, où ils sont calculés sur les 3 derniers pas de temps.

4.4.3 Discussion

Le problème du profil autopropulsé a permis une vérification préliminaire de la bonne implémentation des équations de masse ponctuelle couplées avec celles de l'écoulement fluide.

Δt	u_{avg}	erreur rel.	x_{max}	erreur rel.
Δt_0	.28466159	0.42557%	13.219092	0.45418%
$\Delta t_0/2$.28362474	0.05978%	13.168144	0.06701%
$\Delta t_0/4$.28347996	0.00870%	13.160611	0.00977%
$\Delta t_0/8$.28345860	0.00116%	13.159496	0.00130%
$\Delta t_0/16$.28345568	0.00013%	13.159344	0.00015%
$\Delta t_0/32$.28345530	0%	13.159325	0%

Tableau 4.3 Convergence de la distance parcourue x_{max} et de la vitesse moyenne u_{avg} de la masse ponctuelle pour $t \in [20 : 50s]$.

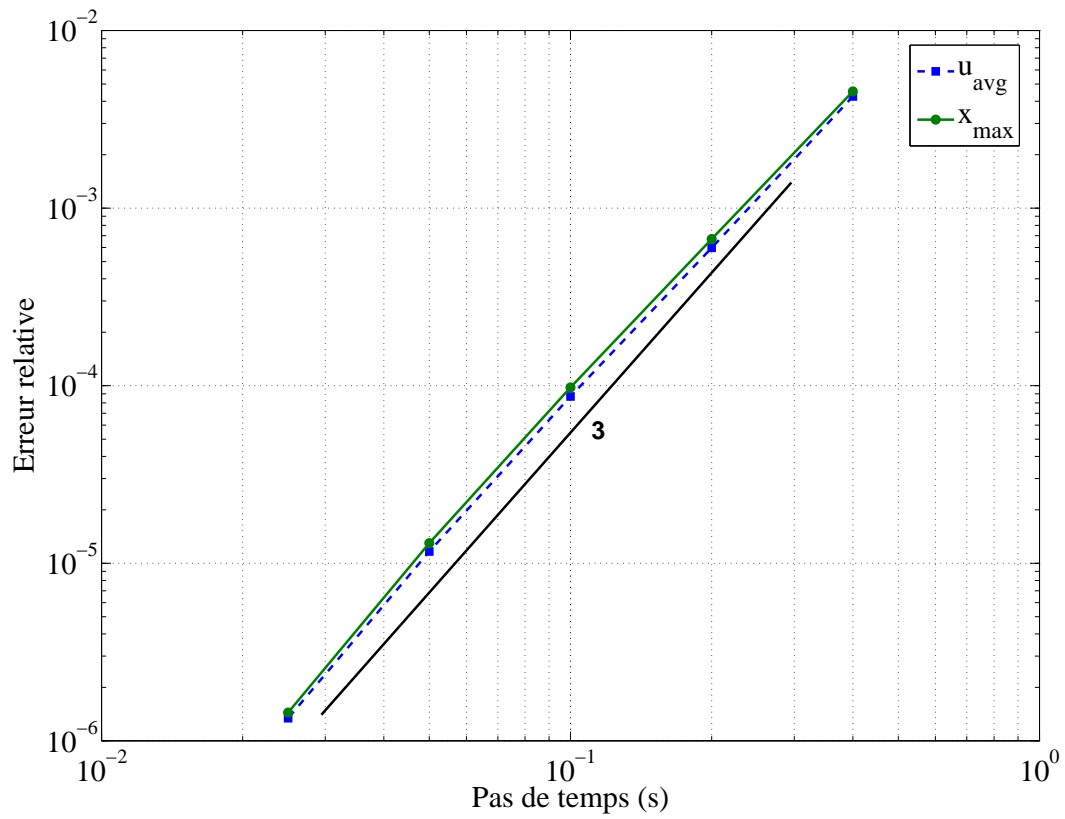


Figure 4.14 Convergence des erreurs relatives sur x_{max} et u_{avg} de la masse ponctuelle pour $t \in [20 : 50s]$.

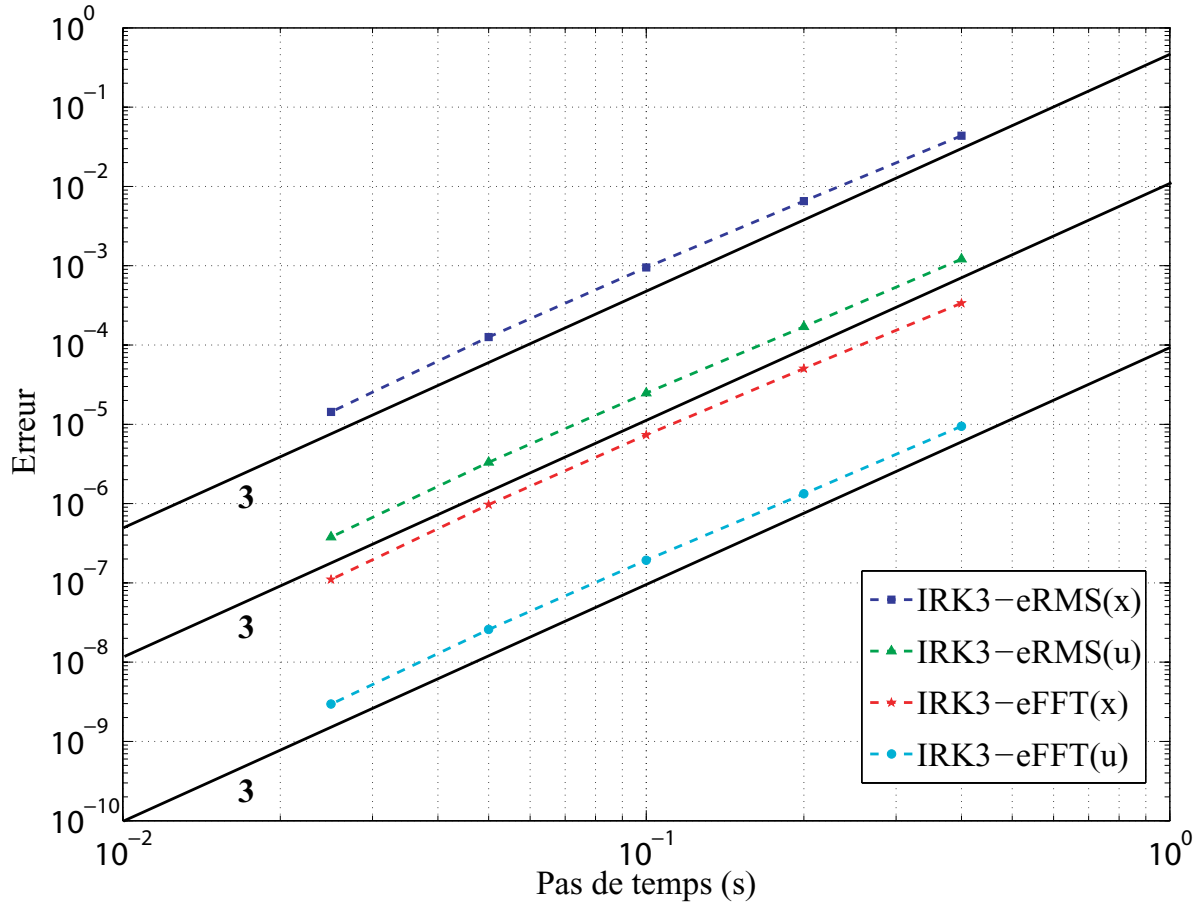


Figure 4.15 Convergence des erreurs temporelle et spectrale sur le déplacement x_{mp} et la vitesse u_{mp} de la masse ponctuelle pour $t \in [20 : 50s]$.

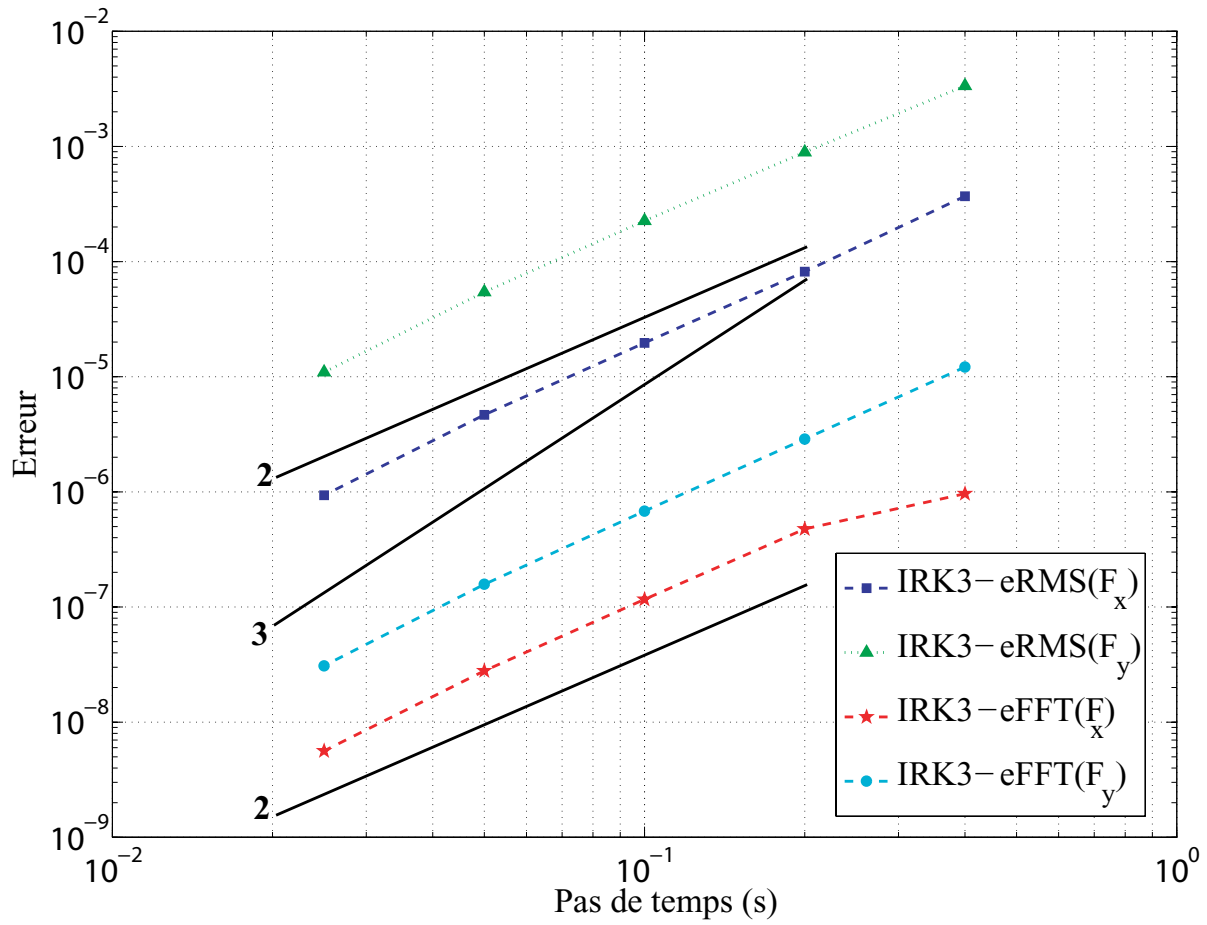


Figure 4.16 Convergence des erreurs temporelle et spectrale sur les efforts pour $t \in [20 : 50s]$.

Intervalle	0-50s	20-50s	0-100s	20-100s	50-100s
$eRMS(x)$	3.0290	3.0280	3.0218	3.0216	3.0206
$eRMS(u)$	3.0307	3.0172	3.0235	3.0157	3.0148
$eFFT(x)$	3.0299	3.0283	3.0225	3.0221	3.0208
$eFFT(u)$	3.0278	3.0172	3.0216	3.0156	3.0147

Tableau 4.4 Ordres de précision sur le mouvement de la masse ponctuelle pour différents intervalles de temps.

Intervalle	0-50s	20-50s	0-100s	20-100s	50-100s
$eRMS(F_x)$	2.2640	2.1969	2.2564	2.1957	2.1949
$eRMS(F_y)$	2.1875	2.1835	2.1873	2.1834	2.1833
$eFFT(F_x)$	2.2851	2.1858	2.2543	2.1849	2.1846
$eFFT(F_y)$	2.1948	2.2300	2.1956	2.2298	2.2303

Tableau 4.5 Ordres de précision sur les efforts aérodynamiques pour différents intervalles de temps.

Malgré de fortes déformations du maillage dues aux mouvements libre et forcé du profil, on obtient bien les ordres de précision en temps théoriques prévus l'intégrateur en temps de Runge-Kutta du 3^e ordre (IRK3). Seul le schéma IRK3 a été utilisé et la vérification pour IRK1 et IRK5 reste à compléter. Les résultats préliminaires pour IRK3 sont toutefois assez prometteurs pour espérer vérifier le code de calcul avec les schémas IRK1 et IRK5.

Comme sur le cas similaire du profil oscillant présenté à la section 4.2, la réduction de précision observée sur les efforts aérodynamiques s'explique logiquement par l'influence direct de la pression pour laquelle les schémas IRK ont un ordre de précision en temps réduit dans le cadre d'écoulements incompressibles (multiplicateur de Lagrange). Par contre, concernant la vitesse et le déplacement de la masse ponctuelle, le schéma IRK3 conserve son ordre de précision optimal ce qui vérifie le code de calcul.

Enfin, on note que contrairement aux cas de vérification précédents, il n'y a pas dépendance du taux de convergence par rapport à l'intervalle de temps étudié, notamment lors du régime transitoire. Le mouvement libre du profil peut expliquer ce phénomène car il rend le déplacement plus naturel et le régime transitoire moins brutal. Le problème est ainsi moins raide à résoudre lors de la phase transitoire.

4.5 Conclusion

La conclusion générale de cette étape de vérification est que l'approche numérique adoptée avec les schémas d'intégration en temps IRK produit des résultats dont la précision est très proche de celle prédit par la théorie pour des problèmes d'interaction fluide-structure en grands déplacements. A cause de l'ordre de précision réduit pour la pression (multiplicateur de Lagrange), il semble évident d'obtenir une détérioration de la précision en temps pour les forces aérodynamiques et les déplacements de la structure. Toutefois, comme souligné par St-Amand [157], un problème raide, comme ceux concernant les IFS fortement couplés, peut réduire l'ordre théorique global à celui, plus petit, d'un étage (temps implicites intermédiaires). Pour les méthodes de Radau-IIA, le schéma IRK3 peut voir son ordre de précision passer de 3 à 2 et de 5 à 3 pour IRK5. Une étude plus étendue devrait être menée pour comprendre plus précisément ce phénomène de *réduction d'ordre* et essayer de le minimiser comme indiqué à la section 2.3 de la revue de littérature.

On doit ici souligner le rôle prépondérant du choix de la solution initiale à chaque pas de temps pour les intégrateurs en temps IRK à plusieurs étages. En effet, il est possible d'initialiser la solution $U_0^{n+c_i}$ de trois manières différentes :

1. $\forall i \in [1, s], U_0^{n+c_i} = U^n$;
2. $\forall i \in [1, s], U_0^{n+c_i} = U^{(n-1)+c_i}$;
3. $\forall i \in [1, s], U_0^{n+c_i} = g(U^{(n-1)+c_i})$, avec g une fonction d'extrapolation.

Seule la première manière de procéder induit une méthode *auto-démarrante* et initialise les inconnues avec des valeurs plus proches de la solution que la 2^e option. Toutefois, pour un problème non-forcé (cas de la languette flexible encastree), on s'est heurté à quelques problèmes de convergence numérique de la méthode de Newton-Raphson à chaque pas de temps. L'utilisation de la deuxième option a résolu ce problème. En effet, avec la première méthode, tous les niveaux de temps ont la même valeur initiale U^n comme si la solution recherchée était permanente. Or, pour un problème non-forcé d'interaction fluide-structure instationnaire, toute la solution initiale semble permanente pour le solveur, même les conditions aux limites qui ne forcent pas le problème. Ainsi, le solveur ne peut pas facilement trouver la solution instationnaire. Par contre, pour les problèmes forcés comme un profil oscillant, les conditions aux limites rendent la solution initiale instationnaire à certains points, même avec la première option. Cette dernière permet en plus de considérer des pas de temps plus importants et accélère la convergence des itérations de Newton-Raphson puisque la solution initiale est plus proche de la solution recherchée. Enfin, la troisième option initialise le vecteur des inconnues avec des valeurs extrapolées grâce aux solutions des temps précédents.

Cette méthode n'est pas *auto-démarrante* mais permet d'améliorer la solution initiale, sans dénaturer la nature instationnaire du problème IFS, en ajoutant un faible coût de calcul d'extrapolation. Cette méthode doit encore être testée plus précisément.

CHAPITRE 5

RÉSULTATS

Quand tu rédigeras ton traité de la Science des mouvements de l'eau, souviens-toi de mentionner, sous chaque proposition, quelles applications elle a, afin que cette science ne soit pas inutile.

Léonard de Vinci

Le code de calcul ayant été vérifié, on expose dans ce chapitre les différentes applications numériques de la méthodologie développée dans ce mémoire. Trois principaux problèmes d'interaction fluide-structure ont été étudiés. Le premier, appelé *cas de Wall* [162] présente l'étude vibratoire d'une languette flexible encastrée à l'arrière d'un cylindre carré. Le deuxième problème explore les possibilités énergétiques d'un profil oscillant, rigide ou flexible, pour l'extraction de puissance et la propulsion. Enfin, la troisième partie de ce chapitre expose des résultats préliminaires d'un profil oscillant autopropulsé.

5.1 Étude du problème de Wall

En 1999, Wall [162] présentait un problème test impliquant une languette flexible encastrée à l'arrière d'un cylindre carré soumis à un écoulement fluide uniforme. À cause des lâchers tourbillonnaires du cylindre, la languette flexible subit des déformations induites par le fluide. Ce problème bidimensionnel a été largement étudié à plusieurs reprises par de nombreux auteurs pour évaluer la qualité de leur approche numérique pour résoudre les interactions fluide-structure, dans sa configuration initiale par Dettmer *et al.* [163], Olivier *et al.* [150], Valdés Vásquez [168] et Wood *et al.* [152], ou avec quelques changements par De Nayer [3], Hübner *et al.* [149] et Valdés Vásquez [168].

À partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds, un écoulement passant autour d'un corps non-profilé génère des tourbillons (vortex) qui sont lâchés à partir des angles du carré à une fréquence constante. C'est le fameux lâcher tourbillonnaire de von Kármán. Toutefois, la languette flexible encastrée derrière le cylindre carré modifie ce lâcher de vortex. En effet, le comportement oscillatoire du fluide induit des forces aérodynamiques (poussée et traînée) dépendantes du temps, ce qui excite la languette flexible et mène à un mouvement oscillatoire de la structure. Ce mouvement, interagissant avec les tourbillons, perturbe alors le comportement de l'écoulement comme le montre la figure 5.1. C'est donc un problème IFS

très fortement couplé qui altère l'allée initiale de von Kármán.

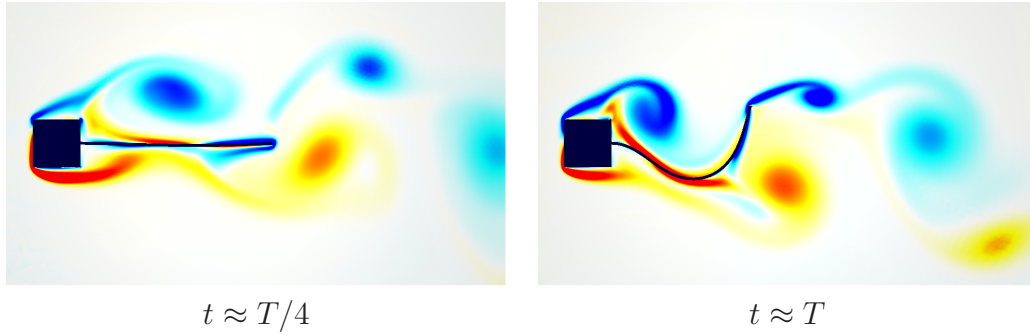


Figure 5.1 Champs de vorticité obtenus avec IRK3 - $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ s et 79 850 nodes.

5.1.1 Description du cas

A. Analyse dimensionnelle

Le choix des paramètres et des données du fluide et de la structure va déterminer la nature de ce problème oscillatoire. Grâce à l'analyse dimensionnelle des interactions fluide-structure présentée à la section 3.1, on peut identifier les paramètres adimensionnels qui caractérisent ce problème physique. Ceci permet une meilleure compréhension du problème en réduisant le nombre de paramètres le décrivant en totalité. On pourra ainsi classer les études précédentes plus facilement et comparer correctement nos résultats obtenus avec une configuration adimensionnalisée. D'après l'analyse dimensionnelle d'une structure flexible encastrée (voir section 3.1.4), 7 nombres adimensionnels caractérisent le comportement du système :

$$U^* = f(x^*, t^*, Re, M_{flex}, C_r, \nu) \quad (5.1)$$

En effet, on pose habituellement $p_0 = \rho_f U_0^2$ et $\xi_0 = L$ de sorte que $Eu = 1$ et $D = 1$ ne sont plus caractéristiques du problème.

Grâce à ces nombres adimensionnels, on peut classer les précédentes études en deux cas : le cas de Wall et le cas de Hübner dont les paramètres sont résumés dans le tableau 5.1. Comme on peut le voir, bien que les auteurs abordent des problèmes géométriquement identiques, les deux cas correspondent à deux problèmes physiques différents. En outre, contrairement aux notations trouvées dans les travaux précédents, le côté du carré semble être une échelle plus appropriée que la longueur totale du système pour caractériser le problème puisque le cylindre est responsable des lâchers tourbillonnaires, induisant les vibrations de la structure.

C'est pourquoi, on définit deux échelles de temps et deux nombres de Reynolds par rapport à la longueur totale τ_L et Re_L d'un côté puis par rapport au côté du carré d'autre part τ_d et Re_d . Ainsi, on définit les pas de temps adimensionnels par $\Delta t_L^* = \Delta t / \tau_L$ et $\Delta t_d^* = \Delta t / \tau_d$.

Paramètres	Cas de Wall	Cas d'Hübner	
	dim	dim	adim
Côté du carré : d	0.01m	0.01m	0.2
Longueur totale : L	0.05m	0.05m	1
Épaisseur de la languette : e	0.0006m	0.0006m	0.012
Échelle de temps : $\begin{cases} \tau_L = L/U_0 \\ \tau_d = d/U_0 \end{cases}$	$1/10.26 \text{ s}$ $1/51.3 \text{ s}$	$1/6.3 \text{ s}$ $1/31.5 \text{ s}$	1 0.2
Module d'Young : E	$2.5MPa$	$0.2MPa$	1 708 153
Densité de la structure : ρ_s	$100kg/m^3$	$2000kg/m^3$	1 694.91525
Viscosité du fluide : μ_f	$1.82 \cdot 10^{-5} Pa.s$	$1.8210 \cdot 10^{-5} Pa.s$	$98.04 \cdot 10^{-4}$
Densité du fluide : ρ_f	$1.18kg/m^3$	$1.18kg/m^3$	1
Vitesse du fluide : U_∞	$0.513m/s$	$0.315m/s$	1
Nombre de Reynolds : $\begin{cases} Re_L \\ Re_d \end{cases}$	333 67	204 41	
Coefficient de Poisson : ν	0.35	0.35	
Nombre de Cauchy : C_Γ	$12.4216 \cdot 10^{-7}$	$5.85427 \cdot 10^{-7}$	
Nombre de Masse : M_{flex}	0.01180	0.00059	

Tableau 5.1 Paramètres dimensionels et adimensionnels pour les cas de Wall et d'Hübner.

B. Cas d'Hübner

On choisit d'étudier le second cas, initialement décrit par Hübner *et al.* [149], dans sa forme adimensionnelle décrite dans la dernière colonne du tableau 5.1. Comme dans l'exemple de vérification, la géométrie et les conditions aux limites sont spécifiées sur la figure 5.2. La structure est modélisée par la loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff pour modéliser correctement les grands déplacements. Le calcul instationnaire démarre à partir d'une solution stationnaire.

L'application de la méthodologie au cas d'Hübner a pour but d'analyser le comportement vibratoire de la languette et de comparer les résultats avec ceux trouvés dans la littérature pour valider l'approche numérique. On note que tous les résultats présentés sont redimensionnalisés grâce au tableau 5.1 afin de faciliter la comparaison avec les précédentes études.

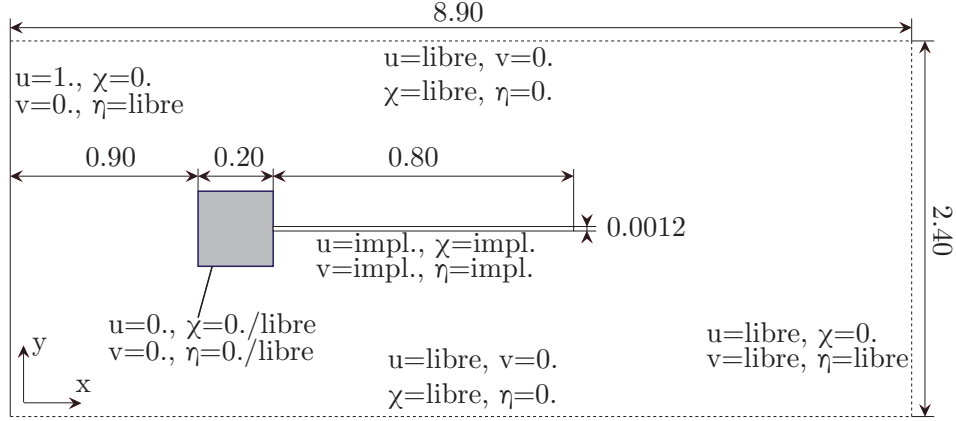


Figure 5.2 Géométrie et conditions aux limites pour le cas de Wall.

C. Convergence en maillage

Afin de vérifier la convergence en maillage du code de calcul (la convergence en temps a déjà été étudiée en détails au chapitre 4), on a effectué des simulations avec 4 maillages différents présentés sur les figures 5.3 et 5.4 avec des éléments de Taylor-Hood (voir section 3.5). Les nombres de nœuds sont à peu près doublés à chaque fois : 10 179, 19 410, 41 913 et 79 850 nœuds.

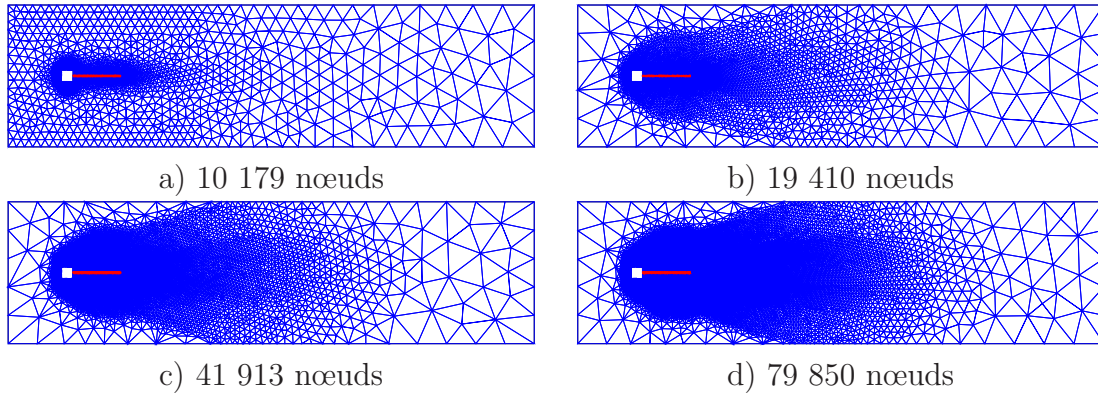


Figure 5.3 Maillages utilisés pour le problème de Wall.

Le processus de raffinement de maillage se fait manuellement en essayant de prendre en compte les zones de déformations de la structure ainsi que les lâchers tourbillonnaires. L'instationnarité des phénomènes rend difficile la construction d'un maillage initial adapté à la physique de chaque pas de temps. Il serait nécessaire de remailler pour améliorer ce processus. En outre, les fortes déformations de la lamelle flexible ont nécessité l'utilisation

d'un pseudo-solide non-linéaire (voir section 3.3.3) pour éviter des repliements de mailles sur le maillage le plus fin de 79 850 nœuds. Ce choix a évité tout remaillage mais a requis des temps de calcul beaucoup plus longs (doublés par rapport à un pseudo-solide linéaire).

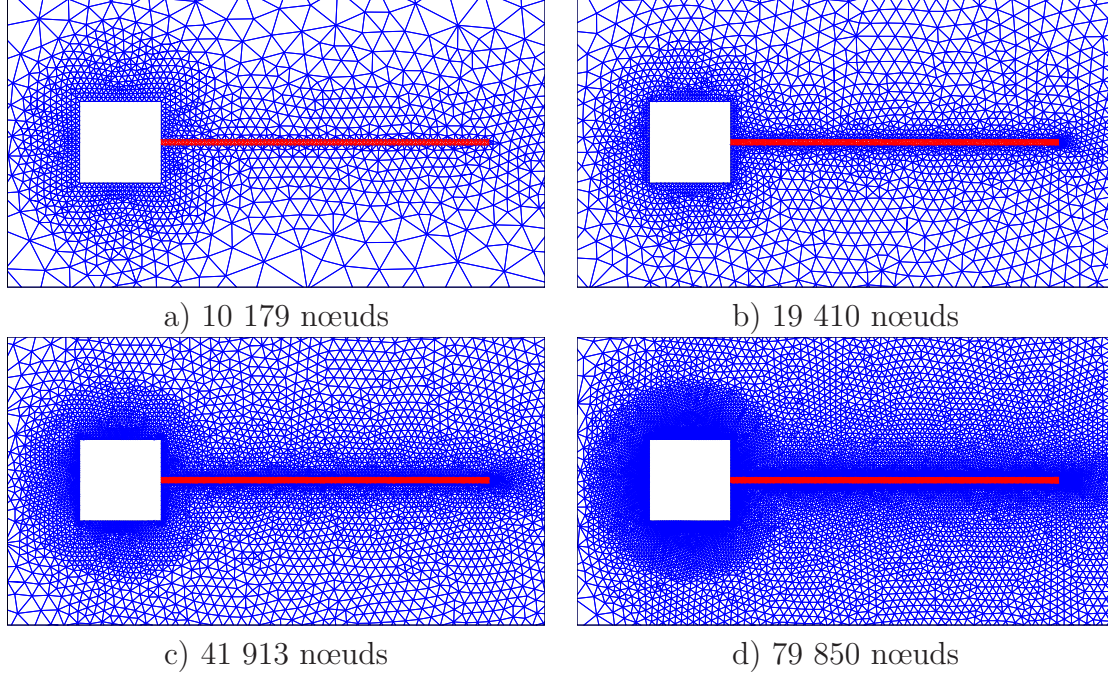


Figure 5.4 Détails des maillages utilisés pour le problème de Wall.

Afin d'effectuer les simulations en un temps de calcul raisonnable, on a opté pour un schéma IRK3 avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}s$ ($\Delta t_d^* = 0.0315$ pour mener les simulations sur l'intervalle $[0; 25s]$). Les résultats présentés sur la figure 5.6 montrent clairement un décalage temporel selon la finesse du maillage. Il paraît donc plus adéquat d'étudier la convergence en maillage avec la norme d'erreur spectrale $eFFT$, définie au chapitre 4, sur l'intervalle $[15; 25s]$. En prenant comme solution de référence les résultats obtenus avec le maillage à 79 850 nœuds, on obtient les courbes de convergence présentées sur la figure 5.7. Les taux de convergence des erreurs sont proches de la valeur théorique d'ordre 1 à la fois sur les déplacements et sur les efforts. En effet, si on note h_e la taille des éléments, la décroissance de l'erreur devrait être quadratique avec les éléments utilisés : $O(h_e^2)$. Or, le nombre de nœuds N_d est approximativement proportionnel à $1/h_e^2$. On prévoit donc une erreur inversement proportionnelle au nombre de nœuds, tel qu'observé. Le solveur est ainsi vérifié au sens de Roache[180].

Finalement, l'erreur relative du maillage le plus grossier par rapport au maillage de référence le plus fin étant déjà relativement faible, on a opté pour le maillage comportant

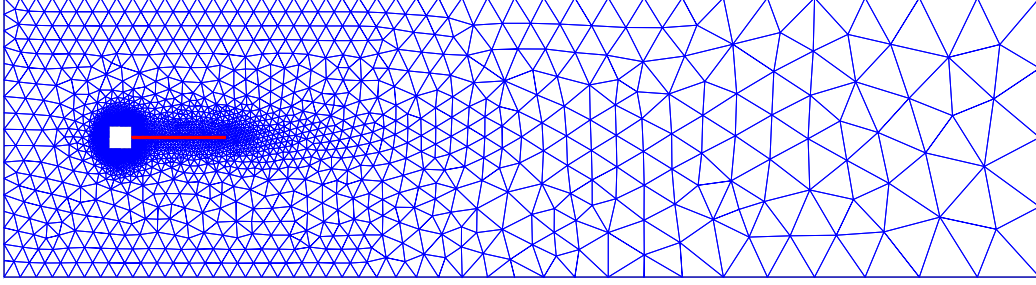


Figure 5.5 Maillage non-déformé pour le cas de Wall - 10179 nœuds.

10 179 nœuds, présenté sur la figure 5.5. Ceci autorise en effet de nombreuses simulations dans un temps de calcul raisonnable. De plus, le faible nombre de nœuds, et donc d'inconnues, permet l'utilisation de schémas d'intégration d'ordres élevés IRK5 malgré les faibles espaces mémoires disponibles.

5.1.2 Comportement vibratoire

Les figures 5.9 à 5.12 présentent le comportement vibratoire de la languette obtenu avec différents pas de temps et trois schémas d'intégration en temps IRK1, IRK3 et IRK5 (voir aussi la figures 5.13). La force verticale F_y agissant sur la languette est exprimée en Newton grâce à l'adimensionnalisation suivante :

$$C_L = 2F_y/(\rho_f D U_0^2)$$

Le spectre de Fourier est calculé pour $t \in [10s : 25s]$ avec $N = 2^{15}$ points d'échantillonnage. On utilise des splines cubiques pour interpoler, à ces points d'échantillonnage, les résultats obtenus avec les différents schémas d'intégration en temps et les différents pas de temps.

A. Théorie linéaire

La théorie des poutres (linéaire) fournit une première approximation pour analyser et comparer le comportement vibratoire de la lamelle flexible. Les fréquences modales de la structure s'expriment alors ainsi :

$$f_n^s = \frac{R_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{Ee^2}{12\rho_s L_{strip}^4}} = \frac{R_n^2}{2\pi} \frac{L^2}{L_{strip}^2} \frac{e}{L} \sqrt{\frac{M}{12C_Y}} \frac{1}{\tau_L} \quad (5.2)$$

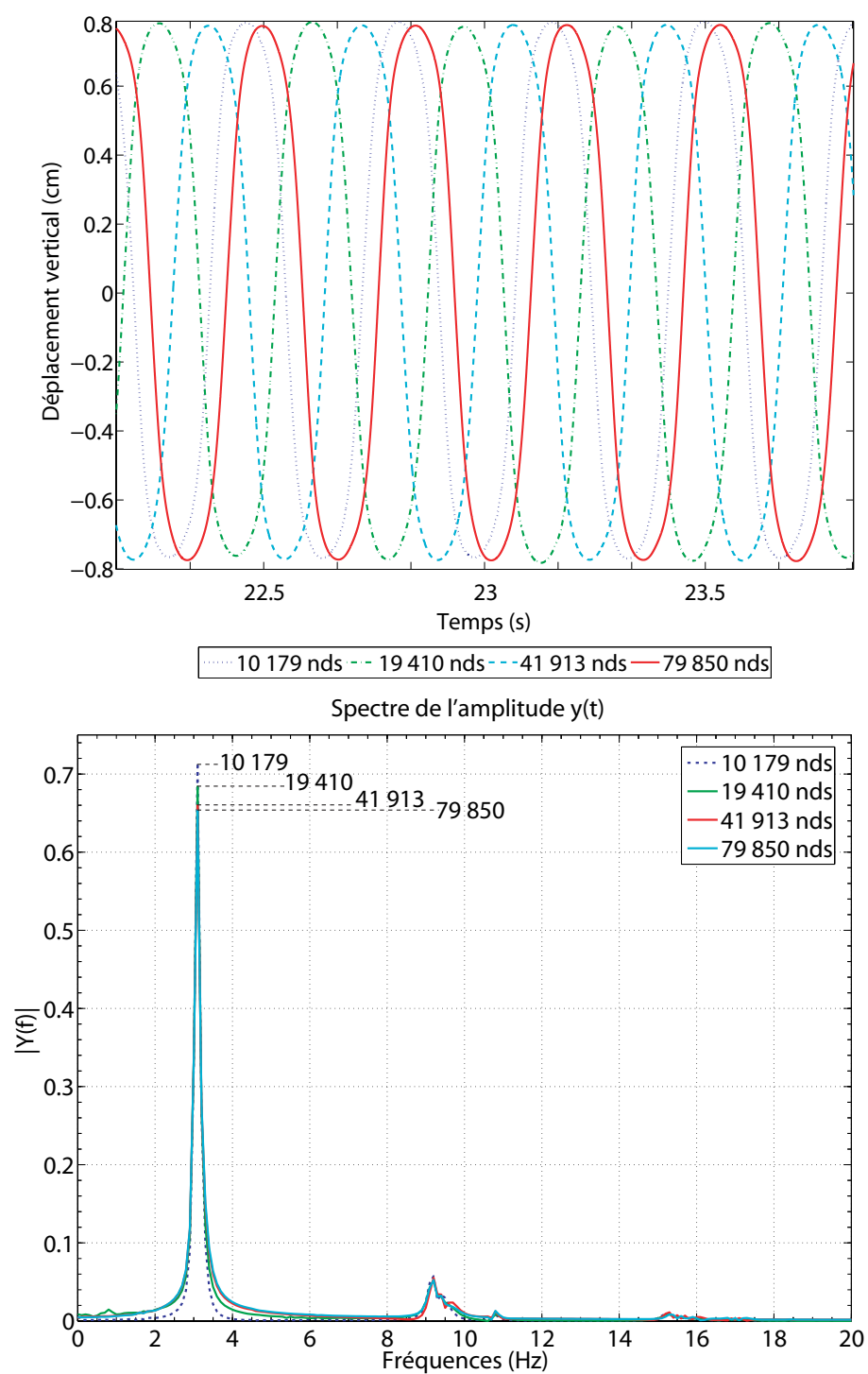


Figure 5.6 Convergence en maillage du déplacement vertical y de l'extrémité libre.

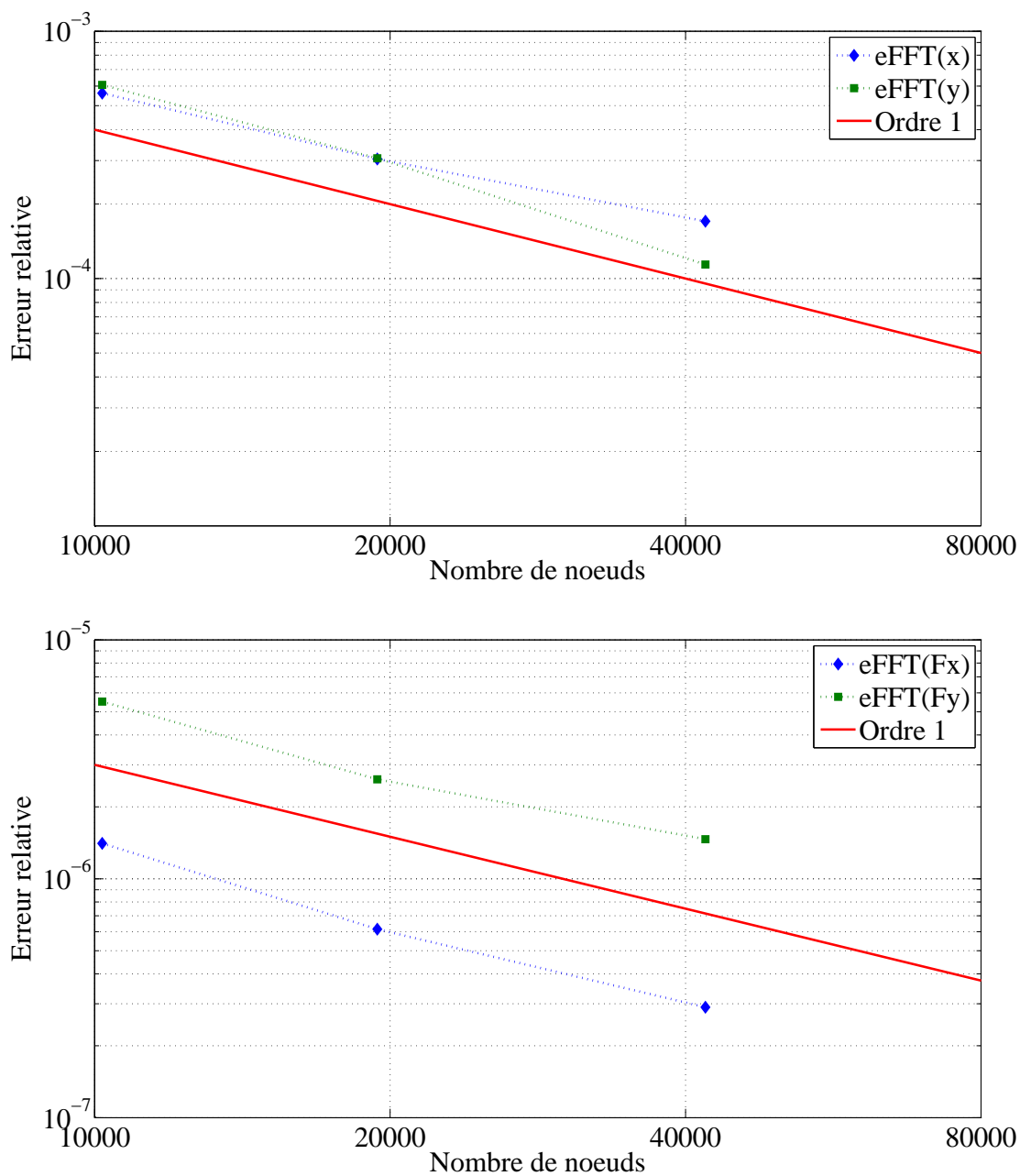


Figure 5.7 Convergence en maillage des erreurs relatives sur les déplacements et les efforts.

en prenant $I_x = be^3/12$ pour l'inertie de la languette, $A = be$ pour son aire et b étant son envergure. Avec $R_1 = 1.875099$, $R_2 = 4.694084$, $R_3 = 7.85476$, $R_4 = 10.99554$ et $R_5 = 14.13717$, on obtient pour le cas d'Hübner ($L_{strip}/L = 0.8$, $1/\tau_L = 6.3$ Hz) :

f_1^s	f_2^s	f_3^s	f_4^s	f_5^s
0.606 Hz	3.796 Hz	10.63 Hz	20.83 Hz	34.43 Hz

B. Étude fréquentielle

Pour la languette au repos (pas de déformation), Hübner *et al.* [149] et De Nayer [3] ont trouvé sur le cylindre carré des fréquences de lâchers tourbillonnaires d'environ 3.7 Hz. Cette fréquence est très proche de la seconde fréquence modale de la structure $f_2^s = 3.796$ Hz. Quand la languette est libérée, il paraît alors évident d'observer un mouvement correspondant à l'excitation du second mode structurel avec de larges déplacements comme représenté sur la figure 5.8. Toutefois, l'analyse spectrale des déplacements de l'extrémité libre et des forces verticales agissant sur la languette (voir tableaux 5.3 et 5.2) met en évidence une fréquence de vibration dominante d'environ 3.1 Hz pour le problème couplé. De plus, la lamelle flexible vibre selon une superposition de plusieurs modes avec le mode principal. Le fort couplage IFS et les grands déplacements de la structure rendent le problème fortement non-linéaire ce qui limite ici l'application de la théorie des poutres.

f_1^y	f_2^y	f_3^y	f_4^y	f_5^y	f_6^y	f_{12}^y
3.067	9.134	15.13	-	-	-	-

Tableau 5.2 Fréquences modales du déplacement vertical y (en Hz) avec IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-4}$ s.

Auteur	f_1^c	f_2^c	f_3^c	f_4^c	f_5^c	f_{12}^c
Hübner [149]	3.1	-	-	-	-	-
De Nayer [3]	3.07-3.20	9.20-9.52	15.16-15.85	-	-	-
Valdès Vásquez [168]	3.22	9.-10.	15.-17.	-	-	-
Présente étude IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-3}$ s	3.067	9.201	15.27	21.27	27.40	-
Présente étude IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-4}$ s	3.067	9.134	15.13	21.13	27.14	89.67

Tableau 5.3 Comparaison des résultats obtenus pour les fréquences de la force verticale (en Hz) avec ceux de la littérature.

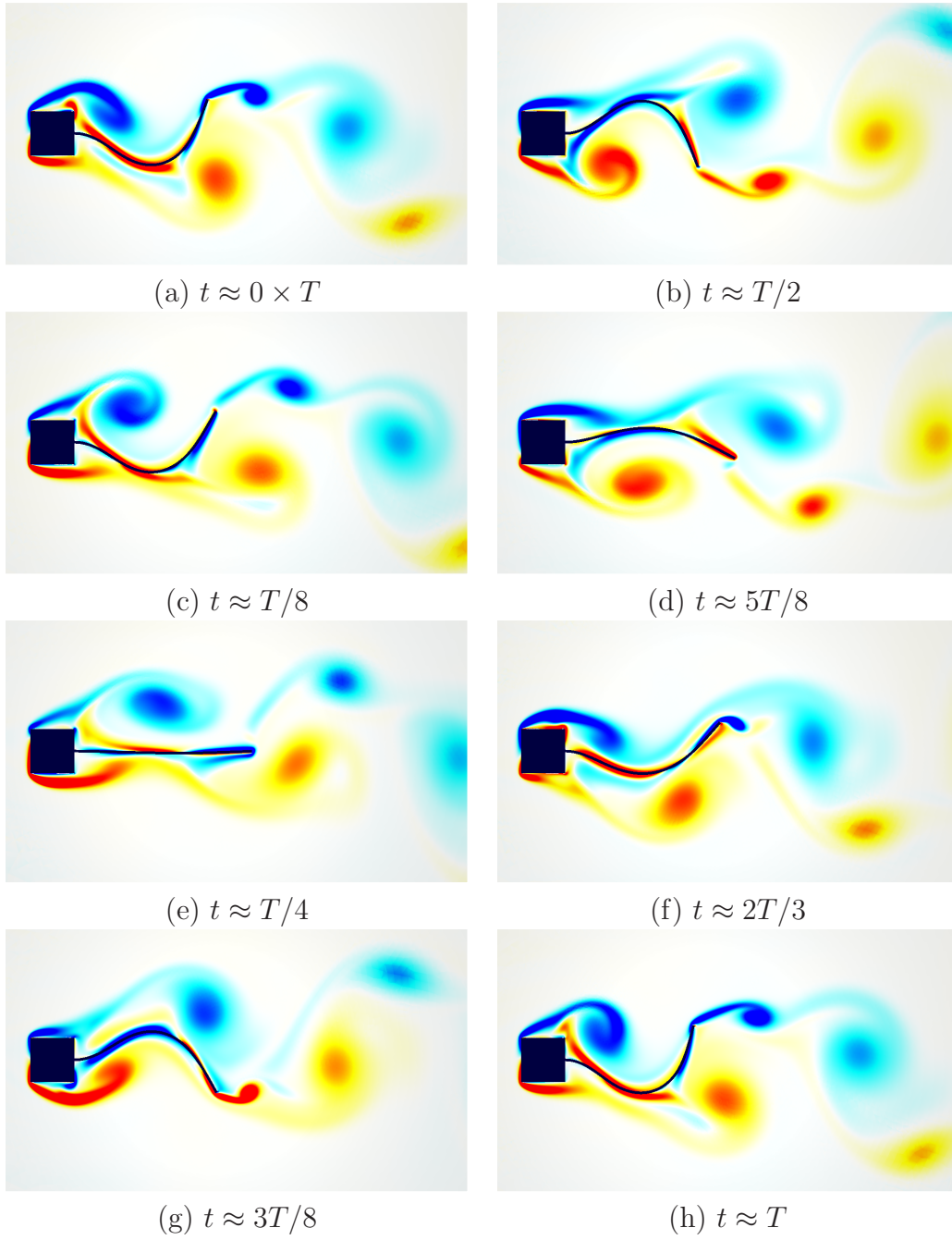
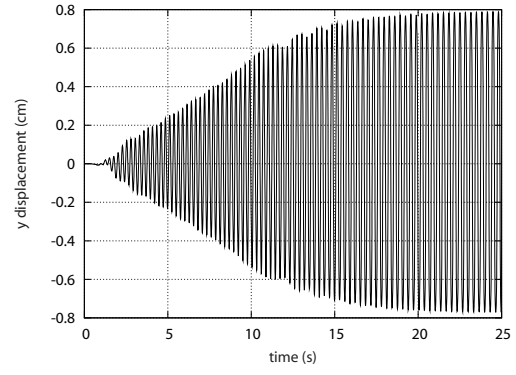
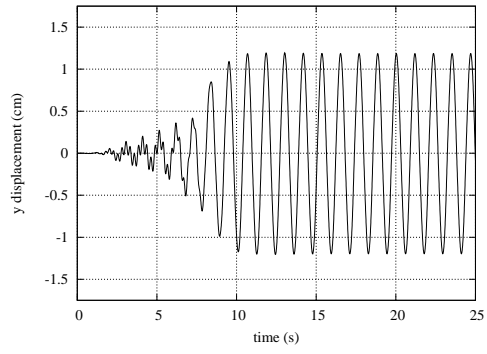
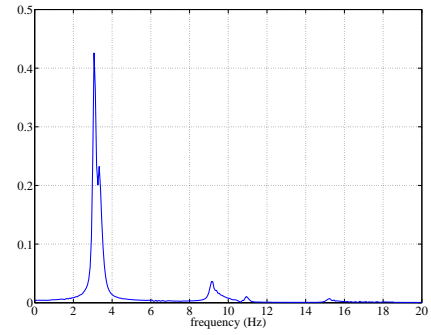
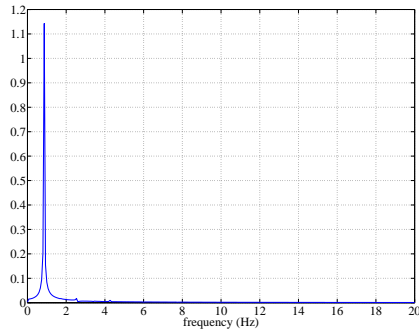


Figure 5.8 Champs de vorticité obtenus avec IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-3}s$ et un maillage plus fin : 79 850 nœuds.

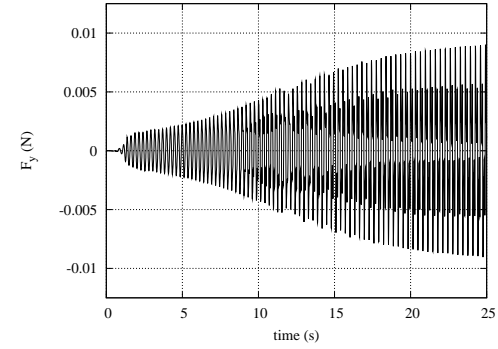
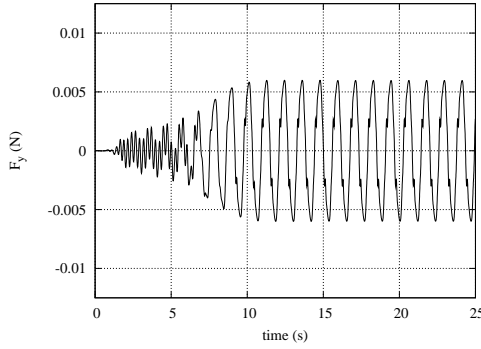
a)



b)



c)



d)

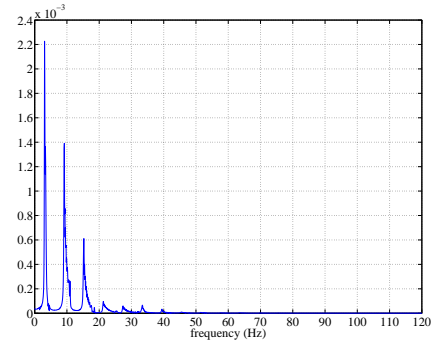
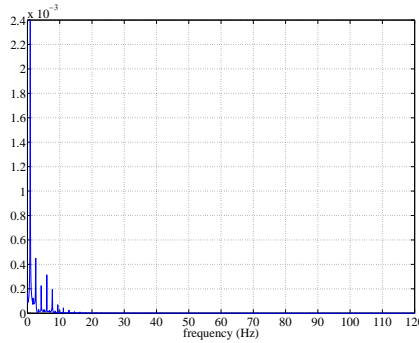
IRK1 - $\Delta t = 5.10^{-3}s$ IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-3}s$

Figure 5.9 Comportement vibratoire, $\Delta t = 5.10^{-3}s$ pour IRK1 et IRK3 : a) Déplacement vertical y de l'extrémité libre, b) Spectre de Fourier de y , c) Force verticale F_y , d) Spectre de Fourier de F_y .

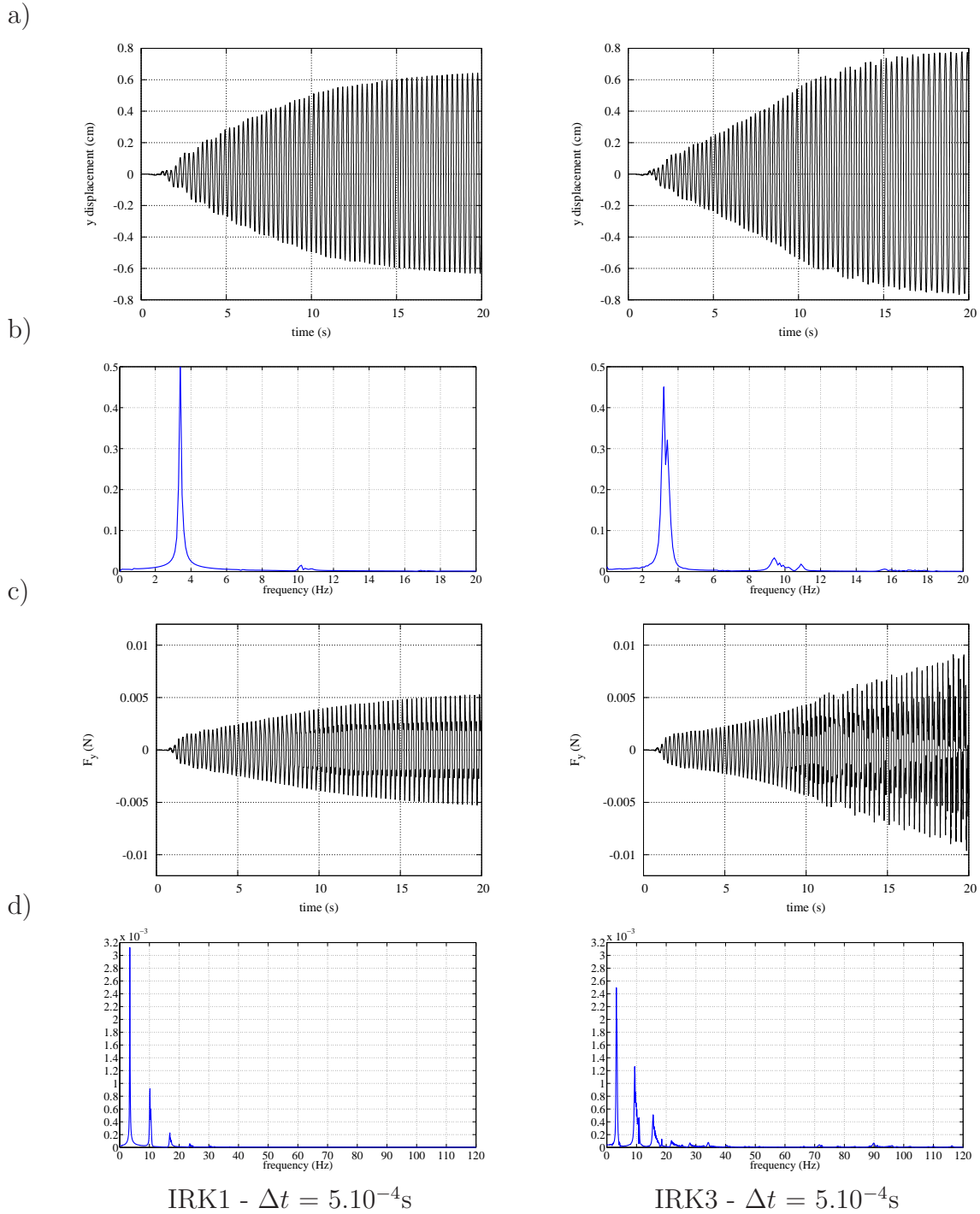
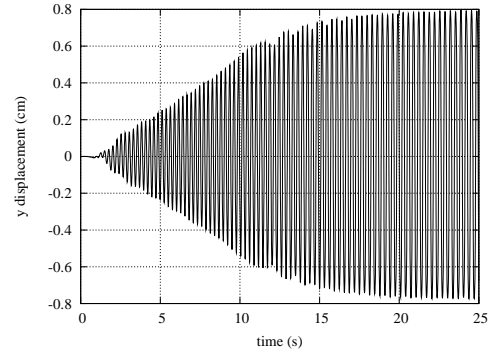
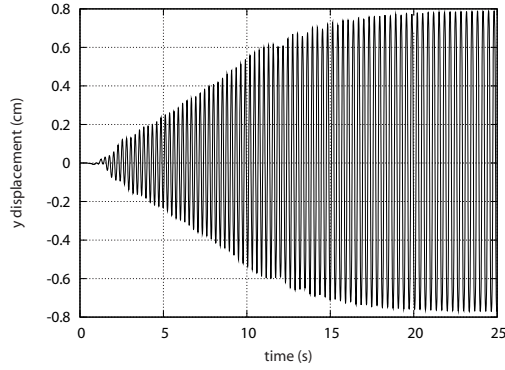
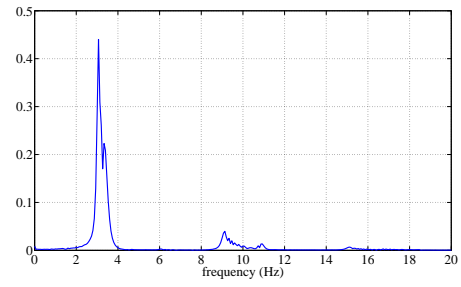
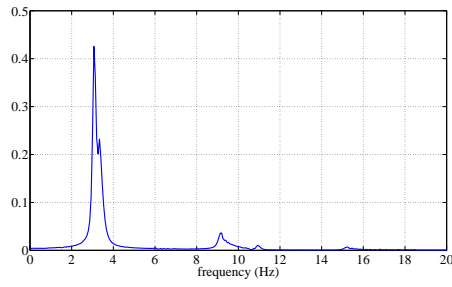


Figure 5.10 Comportement vibratoire, $\Delta t = 5.10^{-4}s$ pour IRK1 et IRK3 : a) Déplacement vertical y de l'extrémité libre, b) Spectre de Fourier de y , c) Force verticale F_y , d) Spectre de Fourier de F_y .

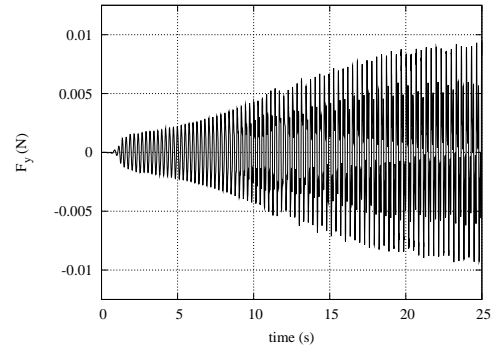
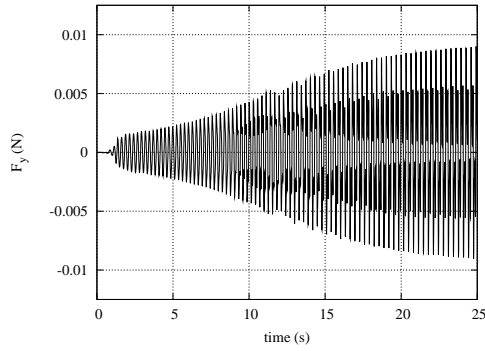
a)



b)



c)



d)

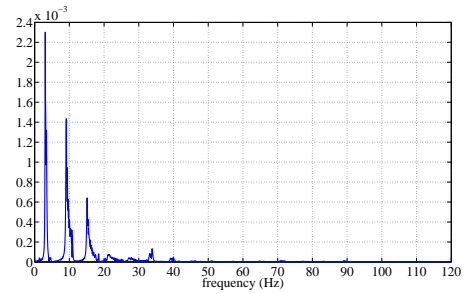
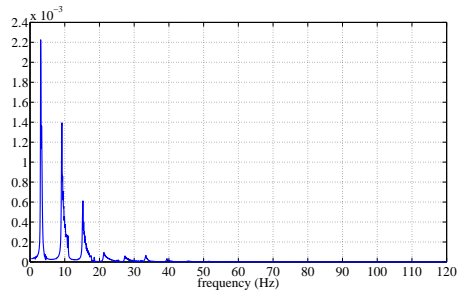
IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-3}s$ IRK5 - $\Delta t = 5.10^{-3}s$

Figure 5.11 Comportement vibratoire, $\Delta t = 5.10^{-3}s$ pour IRK3 et IRK5 : a) Déplacement vertical y de l'extrémité libre, b) Spectre de Fourier de y , c) Force verticale F_y , d) Spectre de Fourier de F_y .

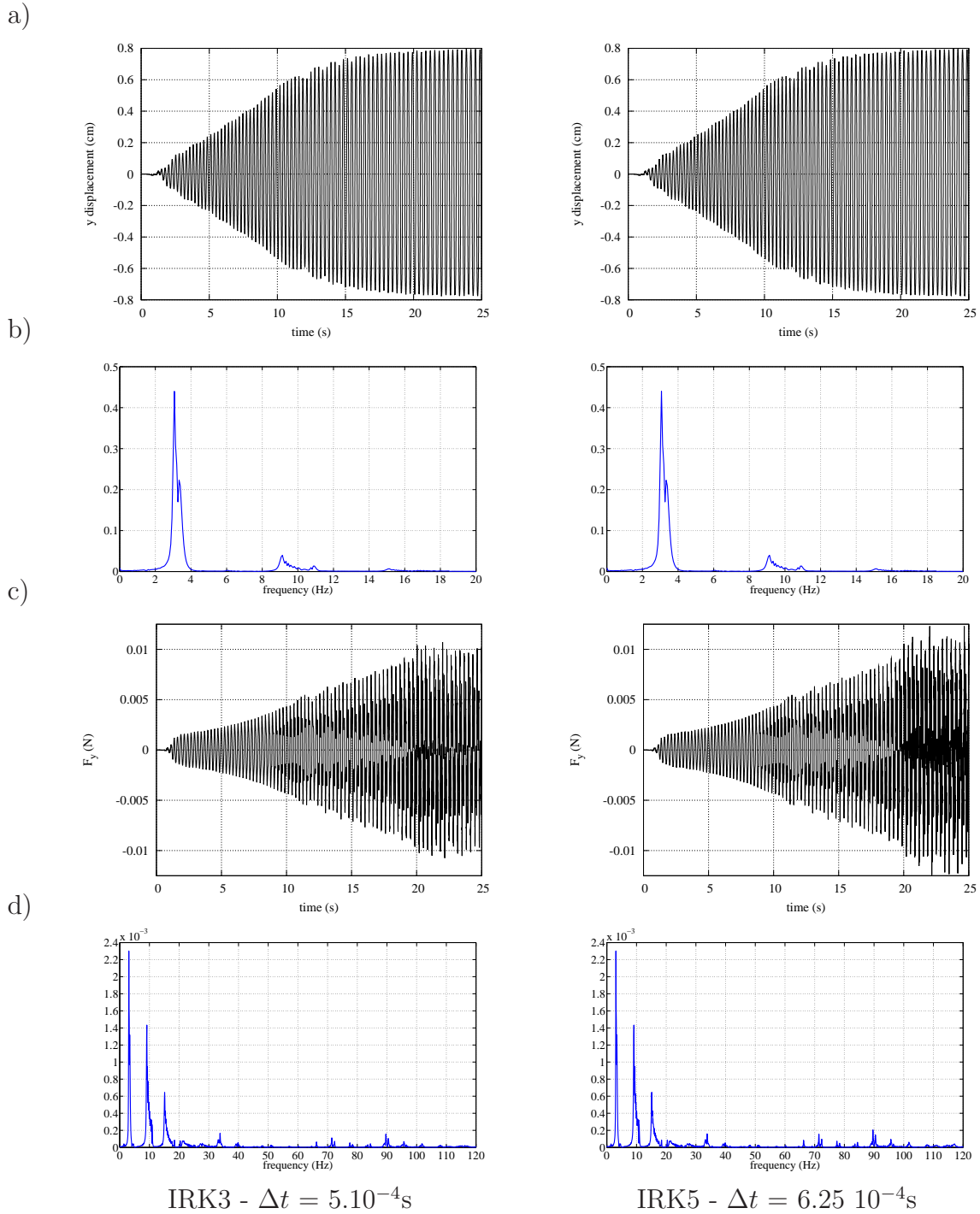


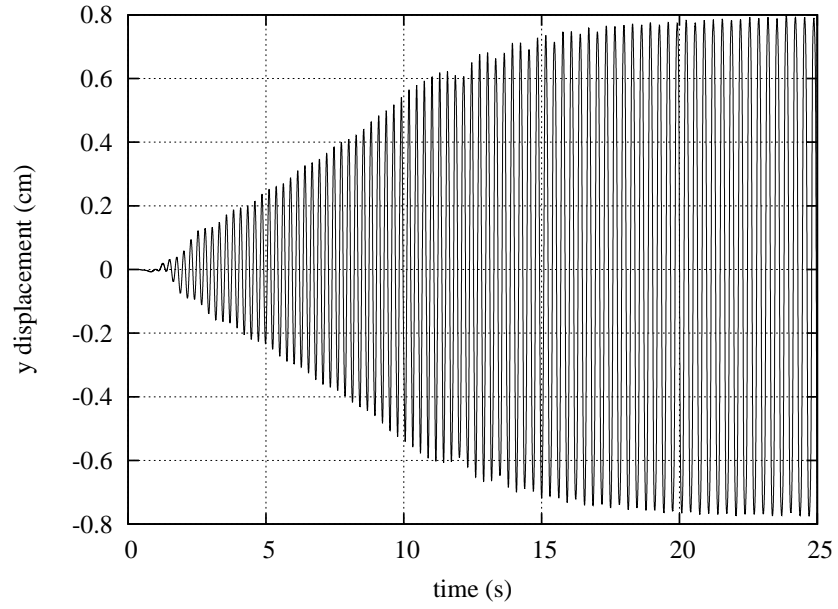
Figure 5.12 Comportement vibratoire, $\Delta t = 5.10^{-4}\text{s}$ pour IRK3 et $\Delta t = 6.25 \cdot 10^{-4}\text{s}$ pour IRK5 : a) Déplacement vertical y de l'extrémité libre, b) Spectre de Fourier de y , c) Force verticale F_y , d) Spectre de Fourier de F_y .

C. Validation

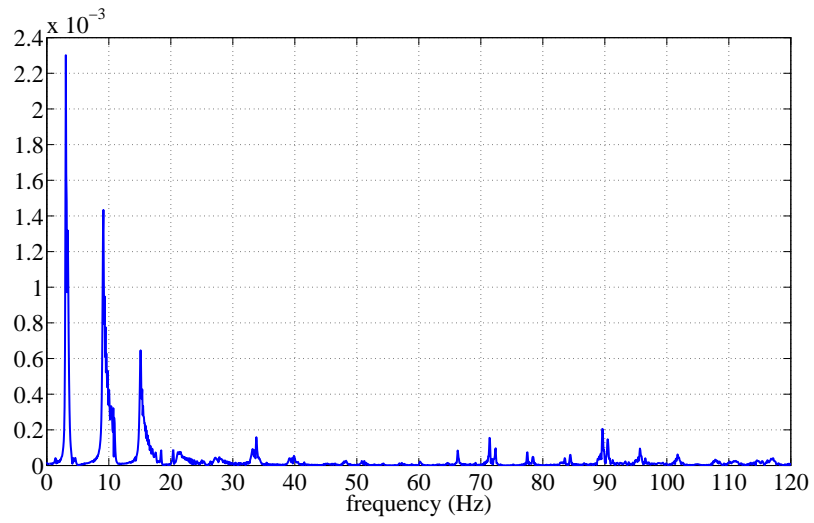
Les figures 5.9 à 5.12 montrent que les résultats pour le déplacement vertical de l'extrémité libre de la languette sont semblables à ceux obtenus par De Nayer, Hübner et Valdés Vásquez [3, 149, 168] excepté avec l'intégrateur en temps IRK du premier ordre et un grand pas de temps. En effet, la languette oscille principalement selon son deuxième mode de vibration (voir figure 5.8) avec une amplitude maximale d'environ 0.8cm. Or, le schéma IRK1 (Euler implicite) ne peut pas capturer ce 2^e mode avec un pas de temps trop grand (voir figure 5.9). *A contrario*, il obtient un mouvement correspondant au premier mode structurel (fréquence couplée : $f^c \approx 0.8$ Hz) avec de très grandes amplitudes ($y_{max} \approx 1.2$ cm). Toute l'énergie se concentre en effet dans ce mode unique. Avec un pas de temps plus petit (voir figure 5.10), le schéma IRK1 capte le bon mode de déformation avec toutefois des amplitudes réduites par rapport aux résultats trouvés dans la littérature. Les schémas implicites de Runge-Kutta d'ordres supérieurs peuvent supporter ce comportement non-linéaire et sont suffisamment précis pour reproduire plusieurs modes structurels avec justesse.

Plus précisément, les fréquences couplées f_i^c de ce problème IFS sont résumées dans le tableau 5.3 et se comparent avantageusement aux résultats obtenus par les précédentes études pour les trois premiers modes. Toutefois, les modes de fréquences supérieurs à 20Hz ne sont pas retrouvés dans les résultats des travaux précédents. De même, les résultats obtenus pour le déplacement vertical de l'extrémité libre de la languette et pour le spectre de la force verticale F_y sont très proches de ceux obtenus par De Nayer [3] avec un schéma de Newmark amorti présentés sur la figure 5.14 pour les modes principaux mais différent pour les vibrations de hautes fréquences. On le voit en effet clairement sur la figure 5.13 présentant les résultats des simulations pour le cas d'Hübner avec IRK5 - $\Delta t = 6.25 \cdot 10^{-4}$ s. Cette différence dans les résultats pour les modes de hautes fréquences sera discutée à la section 5.1.3.

Enfin, la figure 5.15 montre les champs de pression obtenus autour de la languette au cours d'une demi-période (déterminée par le premier mode couplé). Ils sont semblables à ceux présentés par De Nayer [3] sur la figure 5.16. Ainsi, les résultats obtenus sont en très bon accord avec ceux trouvés dans la littérature. De plus, les schémas en temps utilisés sont très robustes même avec une approche monolithique et de "grands" pas de temps.

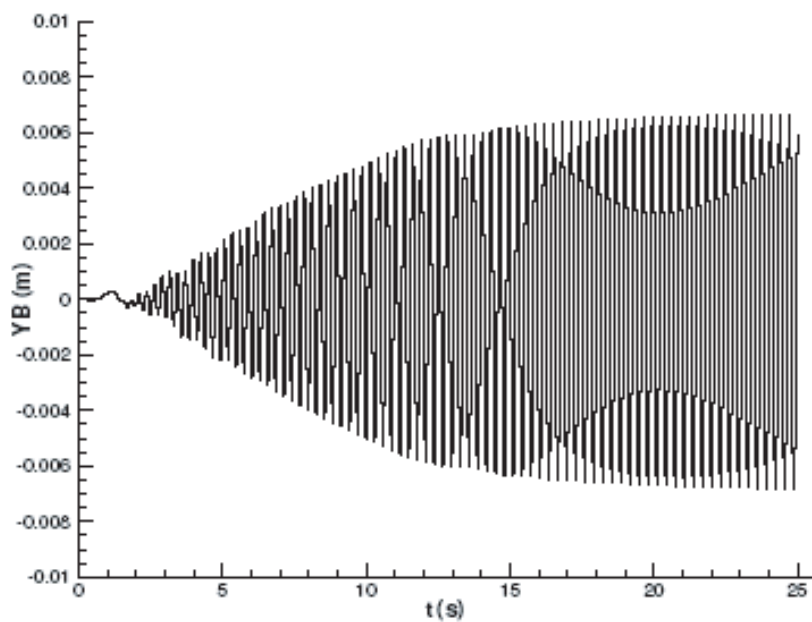


(a) Évolution temporelle de l'extrémité du filament.



(b) Transformée de Fourier des efforts F_y pour $t > 10$ s.

Figure 5.13 Résultats pour le cas d'Hübner avec IRK5 - $\Delta t = 6.25 \cdot 10^{-4}$ s.



(a) Évolution temporelle de l'extrémité libre du filament

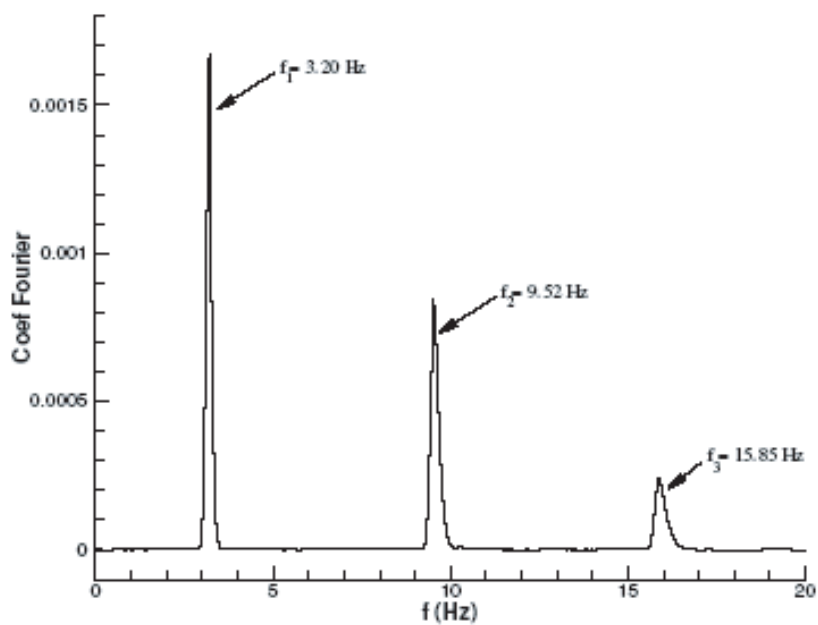
(b) Transformée de Fourier des efforts F_y pour $t > 9.99$ s

Figure 5.14 Résultats obtenus par De Nayer[3] avec un schéma de Newmark amorti.

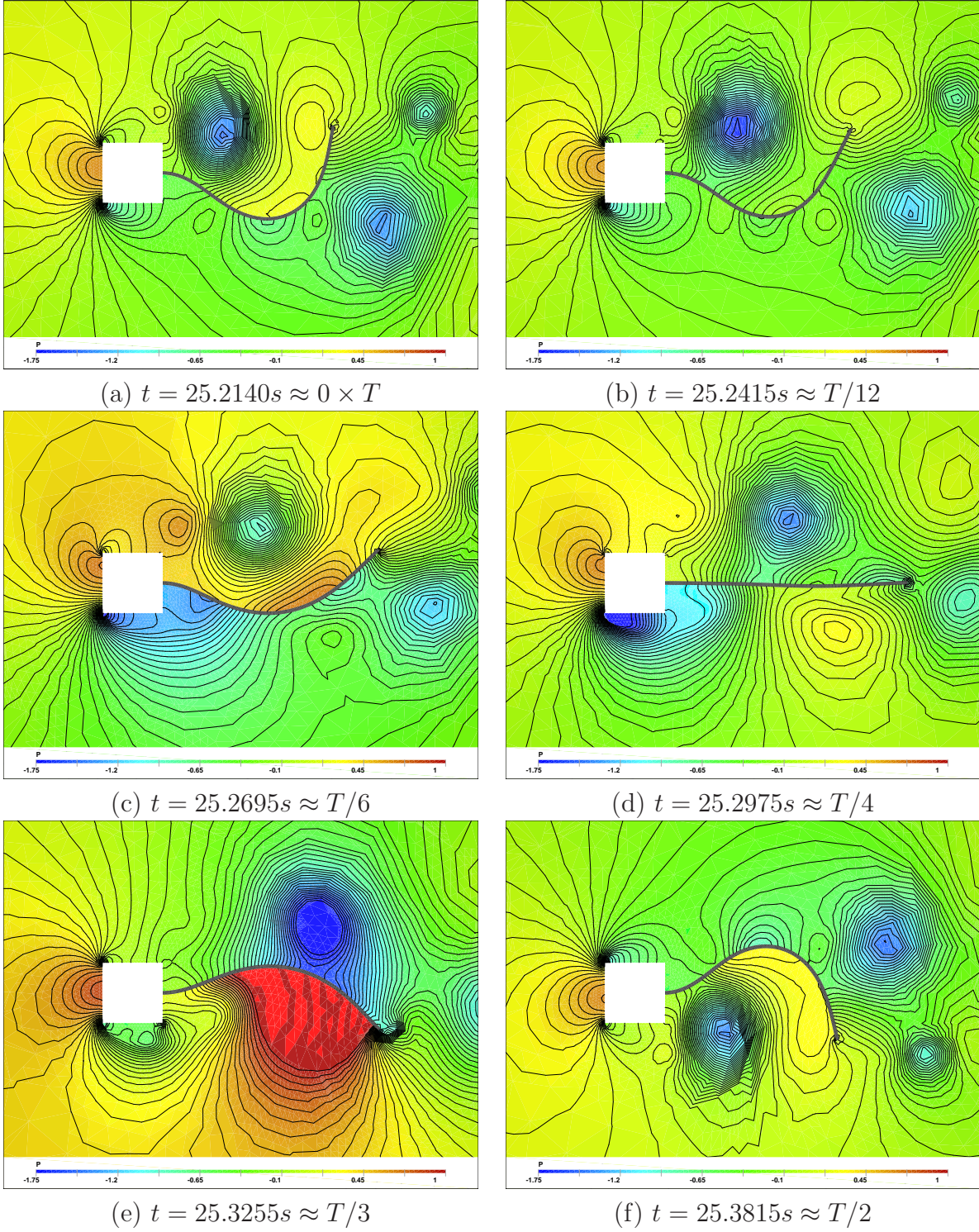


Figure 5.15 Champs de pression à différents temps t , obtenu avec IRK3 - $\Delta t = 5.10^{-4}s$.

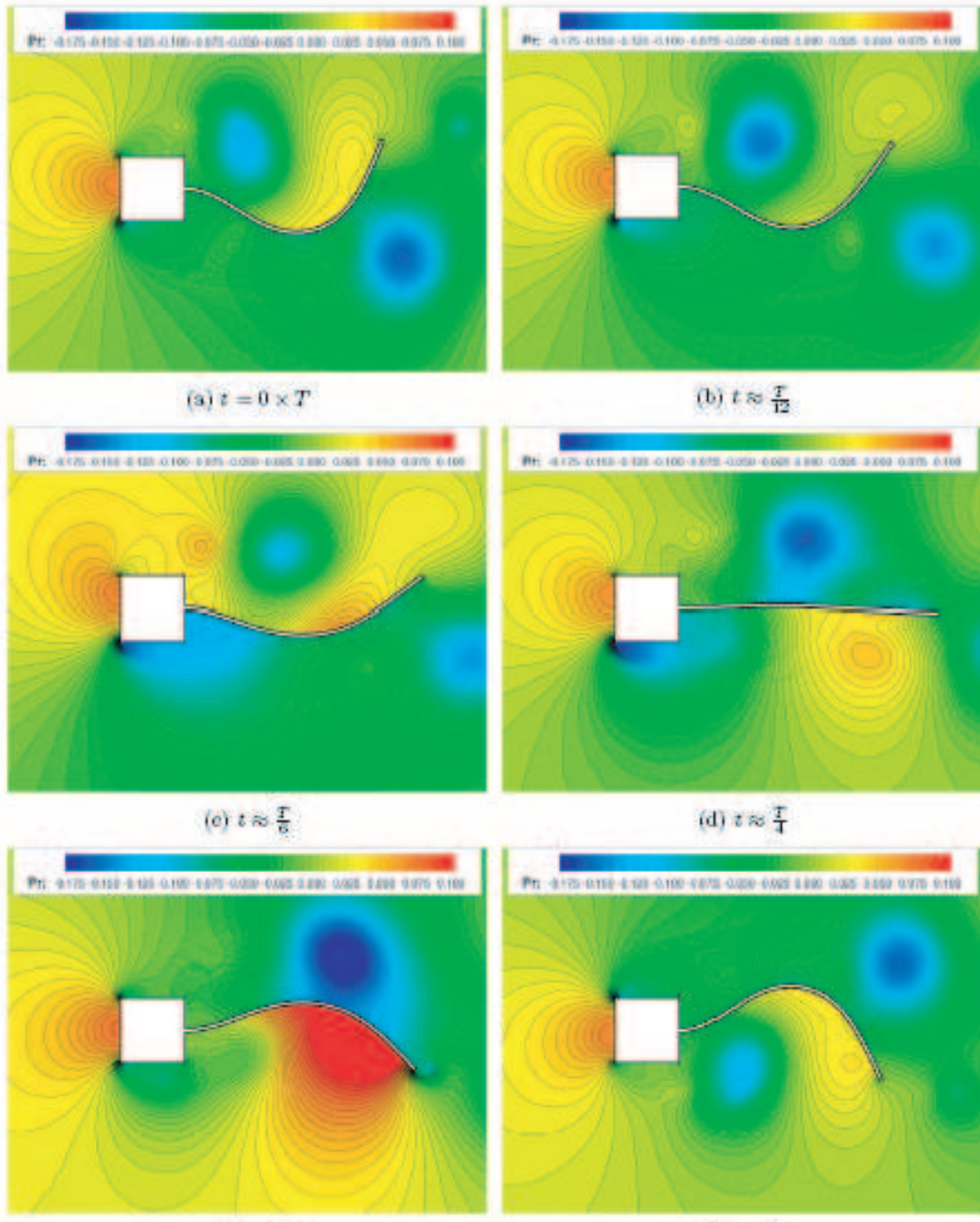


Figure 5.16 Champs de pression sur une demi-période obtenus par De Nayer[3]

5.1.3 Discussion

On doit souligner le fait que, grâce à la précision des schémas de Runge-Kutta d'ordres élevées, on a mis en lumière plusieurs modes structuels dans le domaine des hautes fréquences [20Hz,100Hz] pour la force verticale qui ne sont pas mentionnés par les précédentes études trouvés dans la littérature (voir figure 5.13 et tableau 5.3). En effet, il n'y a aucun amortissement physique dans le modèle structurel utilisé. Il n'y a pas non plus d'amortissement numérique induit par les intégrateurs en temps IRK d'ordres élevés qui ne sont pas stabilisés, contrairement aux schémas amortis habituellement utilisés [164, 163, 168, 152, 3]. Ainsi, la grande stabilité de l'approche présentée pour simuler les interactions fluide-structure instationnaires permet de capturer les hautes fréquences structurelles sans induire d'oscillations parasites numériques.

On note que les spectres de Fourier des déplacements verticaux de l'extrémité libre et des forces verticales n'ont que les trois premières fréquences modales en commun. D'ailleurs, il n'y a aucune fréquence modale au-delà de 20Hz pour les déplacements comme on peut le voir sur la figure 5.9 et les tableaux 5.3 et 5.4. On peut expliquer cela en considérant que l'on a à faire à des efforts structuels internes qui n'interagissent pas avec le fluide à hautes fréquences de sorte que le comportement vibratoire de l'extrémité libre n'en est pas affecté. En effet, si on utilise la vitesse réduite $U_R = T_{structure}/T_{fluid} = U_0/c_s$, où c_s représente la vitesse des ondes dans la structure, on peut estimer la force du couplage IFS des différents modes. Pour les modes structuels de hautes fréquences, la vitesse des ondes est grande et ainsi la vitesse réduite est petite (donc couplage faible). Dans ce cas particulier, on a $U_R = U_0/c_s \approx U_0/(Lf_s) = 6.3/f_s$. Ainsi, pour des fréquences couplées hautes $f_c = f_s \gg 20\text{Hz}$, on a $U_R \ll 0.315 < 1$. Donc, le fluide et la structure ont deux échelles de temps très différentes : $T_{structure} \ll T_{fluid}$ comme on peut le voir graphiquement sur la figure 5.17. Autrement dit, au-delà des basses fréquences, du point de vue de la structure, le fluide semble statique. Le couplage IFS est ainsi vraiment faible de sorte que les modes structuels internes de hautes fréquences ne sont pas couplés directement à l'écoulement fluide et n'influencent donc pas le mouvement de la languette flexible.

Comme la loi de comportement de la structure est non-linéaire, tous les modes sont couplés et un échange d'énergie s'opère librement entre eux. Sans amortissement structurel, ce transfert peut exciter un nombre infini de modes structuraux puisque seulement les modes

f_1^y	f_2^y	f_3^y	f_4^y	f_5^y	f_6^y	f_{12}^y
3.067	9.134	15.13	-	-	-	-

Tableau 5.4 Fréquences modales du déplacement vertical (en Hz) avec IRK3 - $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}\text{s}$.

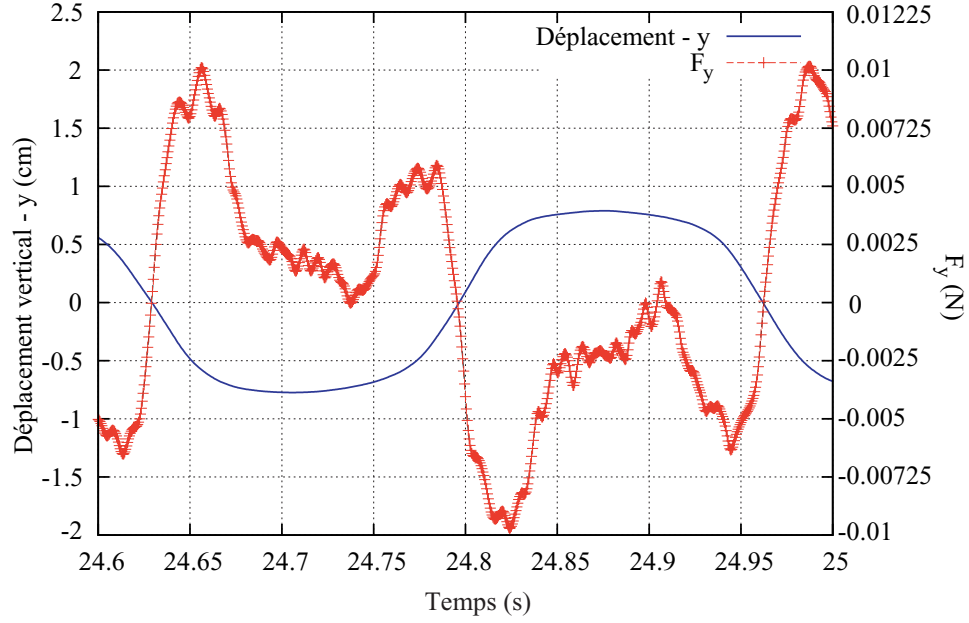


Figure 5.17 Évolution de la force verticale F_y appliquée à la structure comparée à celle du déplacement vertical de l'extrémité libre.

de basses fréquences sont amortis par le fluide à cause d'un fort couplage IFS. Dans ces conditions, le comportement vibratoire ne deviendra sans doute jamais périodique. Pour être plus réaliste, on devrait introduire une forme d'amortissement structurelle pour les modes de hautes fréquences.

5.2 Performances d'un profil oscillant

La méthodologie développée dans ce mémoire pour simuler les interactions fluide-structure en grands déplacements a pour but pratique d'explorer numériquement des processus d'extraction de puissance d'un écoulement fluide et de propulsion grâce à un profil flexible en grands déplacements. C'est ainsi que cette deuxième application présente l'étude des performances d'un profil NACA0015 oscillant tant pour l'extraction de puissance que pour la propulsion. Dans un premier temps, l'étude du régime d'extraction de puissance permettra de comparer les résultats obtenus avec ceux de Kinsey *et al.* [4]. Dans un second temps, on explorera le domaine de la propulsion avec une approche classique supposant une vitesse fixée U_∞ de l'écoulement (voir section 5.3 pour le profil autopropulsé). Enfin, on présentera l'effet de la flexibilité du profil sur les rendements.

5.2.1 Description du problème

A. Analyse dimensionnelle

On étudie un cas semblable à celui présenté à la section 4.2 dans le cadre de la vérification du code de calcul. Grâce à l'analyse dimensionnelle des interactions fluide-structure présentée à la section 3.1, on peut identifier 6 nombres adimensionnels caractérisant le cas d'un profil rigide oscillant :

$$U^* = f(x^*, \tilde{t}^*, Re, \theta_0, h_0^*, f^*) \quad (5.3)$$

En effet, on pose habituellement $p_0 = \rho_f U_0^2$ de sorte que $Eu = 1$ n'est plus caractéristique du problème. De plus, on considère des échelles de temps définies par la fréquence de battement avec le temps adimensionnel $\tilde{t}^* = t^* f^*$ et le nombre de Strouhal $St = \omega h / (\pi U_0)$. L'échelle de longueur l_0 est bien sûr fixée par la corde c du profil.

B. Paramètres du problème

L'aile rigide est décrite par un profil NACA0015 de corde unitaire $c = 1$. et subit un mouvement périodique de battement et de rotation représenté sur la figure 5.18. Ce mouvement est régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta(t) &= \theta_0 \cos(\omega t) \\ h(t) &= h_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

où ω est la pulsation telle que la période s'écrive $T = 2\pi/\omega$. L'angle de rotation moyen θ_{av} est considéré comme nul, l'amplitude de la rotation est définie par θ_0 et l'axe de rotation est situé au tiers de la corde : $x_c = 1/3$. Enfin, le battement a une amplitude unitaire $h_0^* = 1$.

On a donc deux paramètres variables pour le mouvement : θ_0 et f^* . On utilise une fonction lissante jusqu'à $t_0^* = 0.5$ ($e = 3.0$) afin de débiter le mouvement avec une vitesse et une accélération nulles (voir annexe A).

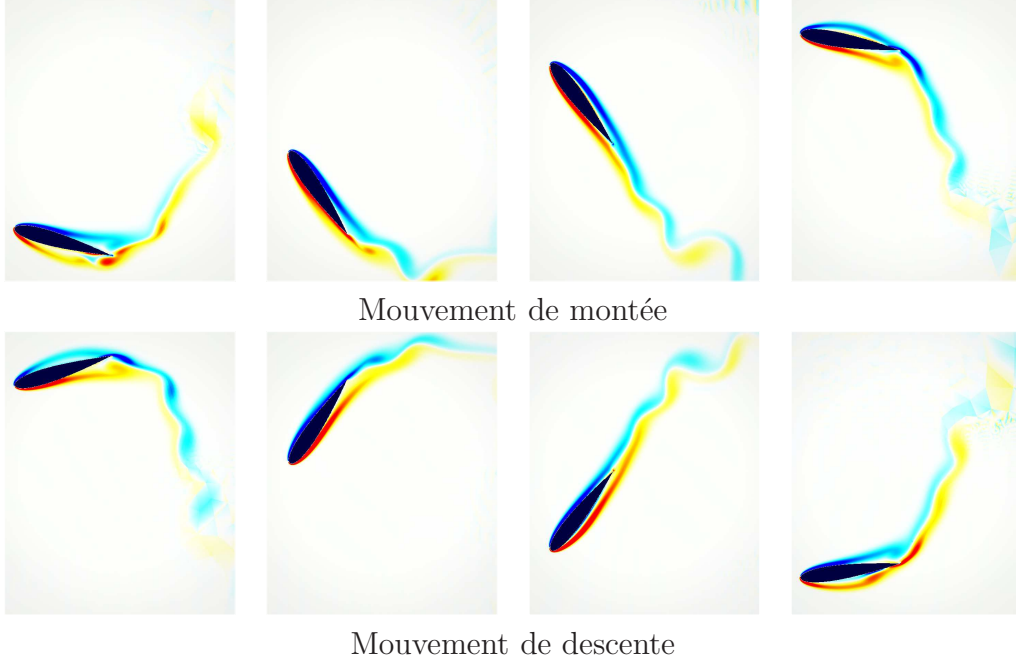


Figure 5.18 Champs de vorticité pour $(\theta_0 = 60^\circ, f^* = 0.18)$, obtenus avec IRK3 - $\Delta t = \Delta t_0/2$ et 120 386 nœuds.

Concernant les propriétés du fluide, on utilise $\rho_f = 1$. pour sa densité, $U_0 = U_\infty = 1$.corde/s pour sa vitesse en entrée et un nombre de Reynolds $Re = \rho c U_0 / \mu_f = 1100$ (avec une viscosité $\mu_f = 1/1100$). Les conditions aux limites sont précisées sur la figure 5.19.

C. Choix du maillage

Le maillage est identique à celui utilisé pour l tape de vérification avec 10 513 nœuds répartis sur deux zones fluides (voir figure 5.20). Toutefois, pour les angles faibles (i.e. $\theta_0 < 70^\circ$), l'approche pseudo-solide permet une déformation du maillage sans repliement avec une seule zone fluide. C'est cette configuration qui est utilisée pour les faibles angles dans l'étude d'extraction de puissance. En outre, le faible nombre de nœuds permet d'effectuer des études paramétriques des performances d'un profil oscillant avec des temps de calcul raisonnables.

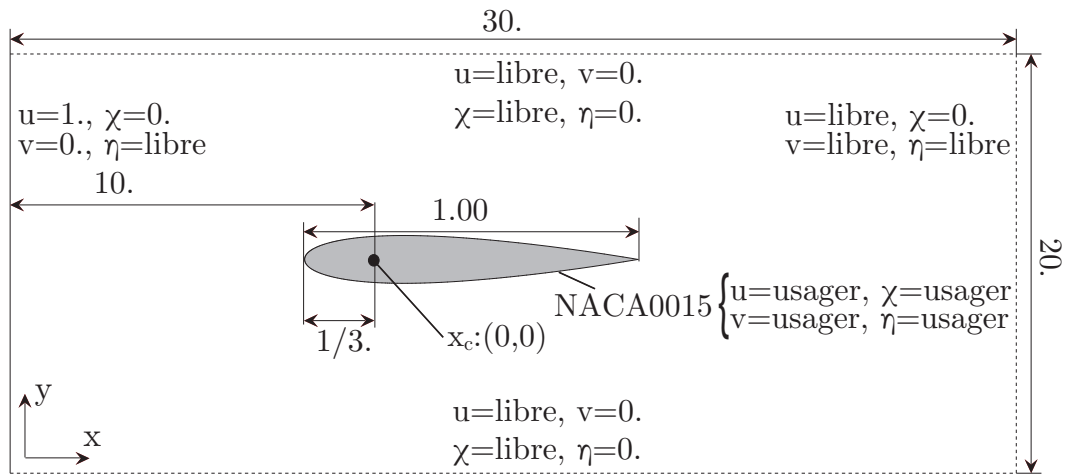


Figure 5.19 Conditions aux limites pour le profil rigide oscillant.

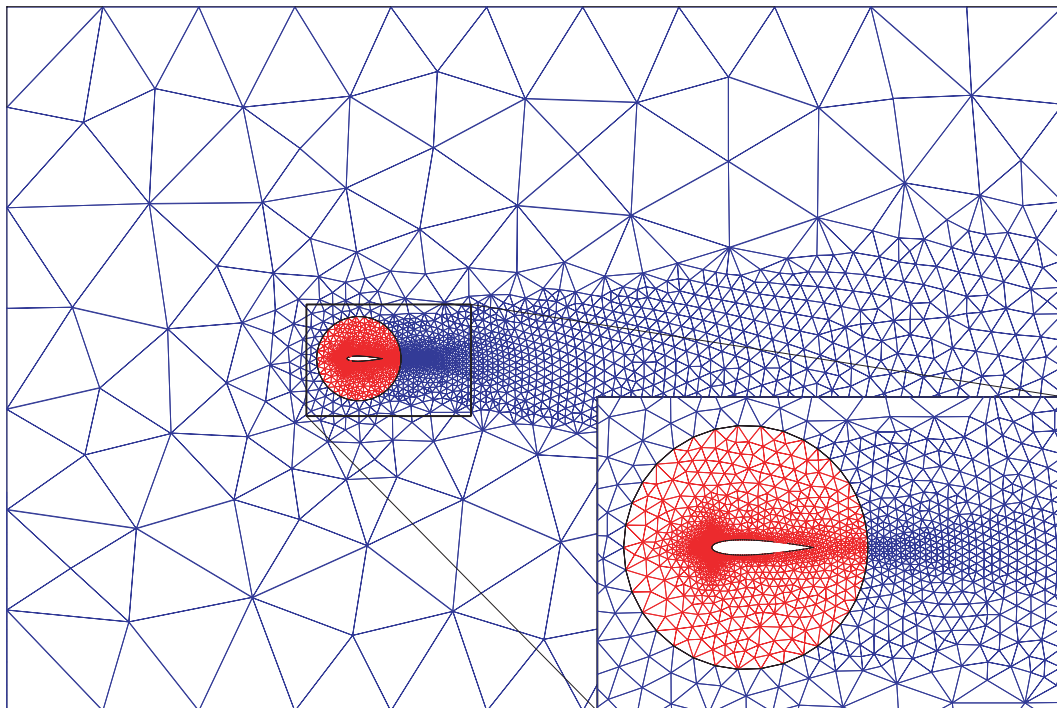


Figure 5.20 Maillage initial avec 2 zones - 10513 nœuds.

5.2.2 Performances d'un profil oscillant

A. Extraction de puissance

On étudie le profil NACA0015 rigide oscillant à un nombre de Reynolds $Re = 1100$ dans son régime d'extraction de puissance afin de valider les résultats obtenus lors des simulations avec ceux présentés par Kinsey et al. [4]. On mène une étude paramétrique pour explorer l'espace "angle de rotation/fréquence réduite" défini par $\theta_0 \in [0 : 90^\circ]$ et $f^* \in [0; 0.25]$. Les simulations ont été menées avec un schéma IRK du premier ordre et différents pas de temps tels qu'on ait toujours $\Delta t < T/2000$.

Les puissances extraites et les rendements sont calculés sur la troisième période de battement. On utilise ici la notion d'*efficacité totale* définie par l'équation 2.1 ainsi :

$$\eta_e = 2 \frac{P_y + P_\theta}{\rho U_\infty^3 d}$$

L'efficacité est alors théoriquement bornée par la limite de Betz : $\eta_{betz} \approx 59\%$.

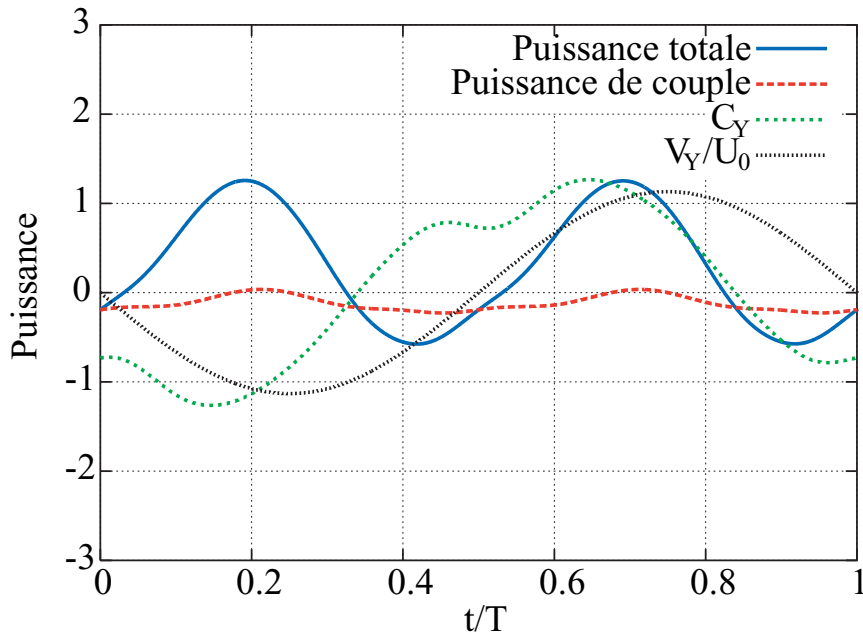


Figure 5.21 Évolution des puissances sur une période pour le cas : $(\theta_0 = 60^\circ, f^* = 0.18)$.

Pour le cas de référence $(\theta_0 = 60^\circ, f^* = 0.18)$, on obtient une efficacité assez faible de 12.0% proche de celle de 11.4% trouvée par Kinsey et al. [4]. L'évolution des puissances sur une période (voir figure 5.21) est également semblable à celle présentée par Kinsey et al..

On observe d'ailleurs que le manque de synchronisme entre les efforts verticaux C_y et la vitesse verticale V_y engendre des puissances transversales P_y négatives sur une grande partie de la période. La puissance moyenne extraite est donc faible, induisant un faible rendement d'environ 12.0%.

La figure 5.22 représente la cartographie de l'efficacité d'extraction de puissance η_e dans l'espace paramétrique (f^*, θ_0) . Les cas simulés sont indiqués par les ronds noirs et les contours d'efficacité sont interpolés sous MATLAB. La cartographie obtenue se compare favorablement avec celle obtenue par Kinsey et al. [4] (voir figure 5.23) et dévoile la même zone de hauts rendements : $\theta_0 \approx 70 - 90^\circ$ et $f^* \approx 0.12 - 0.18$. Les résultats des simulations s'en trouvent ainsi validés. Toutefois, pour de forts angles de rotation (au-delà de 80°), nos résultats n'indiquent pas de baisse d'efficacité mais restent cohérents sur l'espace paramétrique. Il est alors difficile de dire quelle solution est la plus juste. Cette cartographie exhibe en outre la délimitation entre les domaines de l'extraction de puissance et celui de la propulsion. On voit alors que le courbe de plumage ($\chi = 1$) est une très bonne approximation de cette limite.

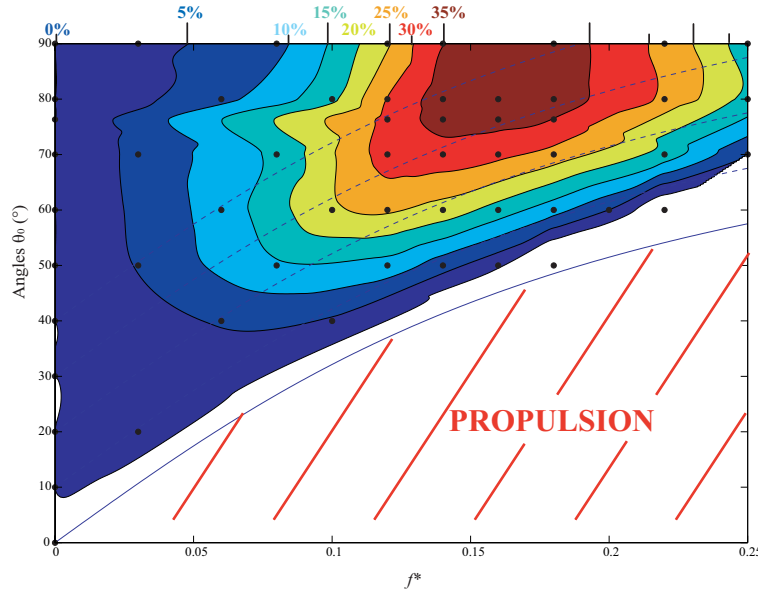


Figure 5.22 Cartographie de l'efficacité d'extraction de puissance η_e dans l'espace paramétrique (f^*, θ_0) .

L'utilisation de schémas implicites de Runge-Kutta d'ordres élevés améliore la précision des calculs comme l'a clairement montré le chapitre 4 portant sur la vérification du code de calcul. Ainsi, une étude de raffinement en pas de temps a été menée avec un schéma IRK3

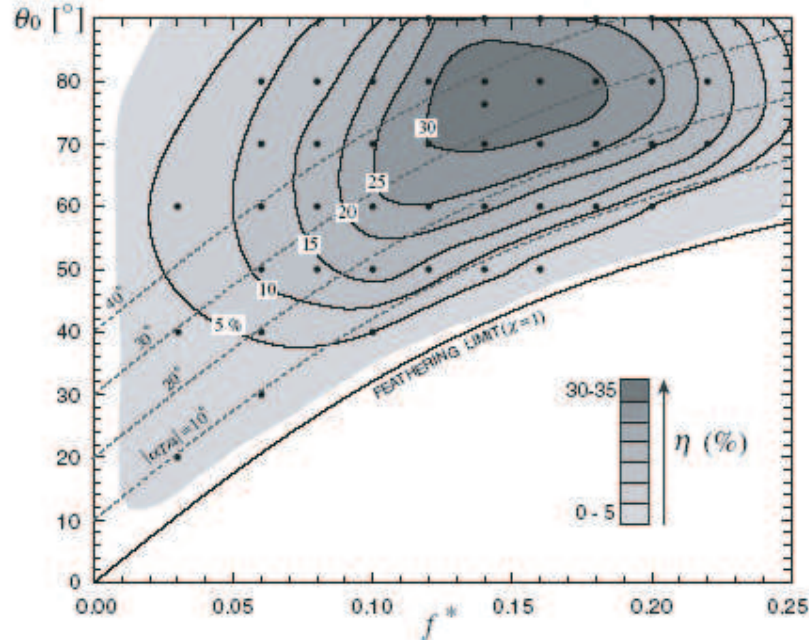


Figure 5.23 Cartographie de l'efficacité d'extraction de puissance η_e obtenue par Kinsey *et al.* [4] .

au point de meilleur rendement pour l'extraction de puissance : $(f^* = 0.14, \theta_0 = 76.33^\circ)$ [4]. Comme la variation des valeurs caractéristiques entre les cycles de battement 8 et 9 est inférieure à 0.1%, les calculs se feront sur la 8^e période de battement. Les résultats sont consignés dans le tableau 5.5 pour les principales valeurs caractéristiques. On a utilisé quatre valeurs de pas de temps : $T/50$, $T/100$, $T/200$ et $T/400$ et les résultats de Kinsey *et al.* [4] avec 253 000 éléments et $\Delta t = T/4000$ sont présentés dans la seconde colonne et valident nos résultats. La dernière colonne du tableau présente l'erreur relative entre les résultats obtenus pour des pas de temps $\Delta t = T/200$ et $\Delta t = T/400$.

On observe dans la dernière colonne du tableau que l'erreur relative reste inférieure à 0.25%

Δt	Kinsey [4]	$T/50$	$T/100$	$T/200$	$T/400$	Erreur relative
$-\bar{C}_T$	2.019	2.17530	2.16254	2.15150	2.14876	0.13 %
$\max \bar{C}_Y$	1.942	1.98664	1.99382	2.01325	2.01371	0.023 %
$\max \bar{C}_M$	0.664	0.64114	0.61447	0.61457	0.61606	0.24 %
η_e	33.9%	36.37%	36.09%	35.93%	35.89%	0.11 %

Tableau 5.5 Résultats du raffinement en pas de temps pour un profil oscillant avec $(f^* = 0.14, \theta_0 = 76.33^\circ)$.

pour toutes les valeurs caractéristiques. On choisit donc un pas de temps $\Delta t = T/200$ pour

mener les simulations. Enfin, à partir de la figure 4.4 présentée à la section 4.2 pour un cas légèrement différent, on peut déduire que pour $\Delta t = T/200 \approx 3.10^{-2}$, on a une erreur e_{RMS} sur F_y de l'ordre de 10^{-3} . Pour ce niveau de précision, la figure 4.6 montre que le schéma IRK3 est plus rapide que le IRK5 et requiert moins de mémoire.

B. Propulsion

Grâce aux schémas implicites de Runge-Kutta d'ordres élevés, il est possible de calculer l'efficacité propulsive d'un profil oscillant pour une large gamme de mouvements. Suite à l'étude faite précédemment pour le cas de rendement optimal d'extraction de puissance, on va considérer un schéma IRK3 et un pas de temps $\Delta t = T/200$ pour mener l'étude paramétrique explorant le domaine défini par $\theta_0 \in [0 : 60^\circ]$ et $f^* \in [0; 0.25]$.

	f^*				
θ_0	0.10	0.14	0.18	0.22	0.25
0°	< 0	1.39	4.38	4.65	4.83
20°	17.71	35.72	33.03	29.25	26.71
30°	< 0	44.00	32.70	40.37	37.69
40°	< 0	< 0	43.21	43.64	26.37
50°	< 0	< 0	< 0	27.08	38.87
60°	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0

Tableau 5.6 Efficacité de propulsion η_p (en %) dans l'espace paramétrique (f^*, θ_0) .

On considère ici la définition classique de l'efficacité de propulsion donnée par l'équation 2.3 : $\eta_p = \frac{\overline{C_T}}{\overline{C_P}}$. Le tableau 5.6 présente l'efficacité η_p (en %) obtenue pour différents paramètres du mouvement. Des efficacités négatives (< 0) sont évidemment obtenues pour les paires (f^*, θ_0) se situant dans le domaine d'extraction de puissance indiqué sur la figure 5.24. La plus grande efficacité de propulsion $\eta_p^{max} \approx 44\%$ est obtenue pour des amplitudes de rotation modérées, $\theta_0 \approx 30 - 40^\circ$ et pour des fréquences réduites dans la gamme $f^* \approx 0.18 - 0.22$.

Toutefois, les efficacités les plus élevées ne garantissent pas les plus grandes forces de poussée. En effet, la figure 5.24 présente la cartographie du coefficient de poussée C_T dans l'espace paramétrique (f^*, θ_0) où les ronds noirs représentent les cas simulés. Contrairement à l'efficacité, la poussée maximale est obtenue pour les hautes fréquences ($f^* > 0.25$). Afin de délimiter la zone de poussée maximale, il faudrait prolonger l'étude à des fréquences d'oscillation supérieures.

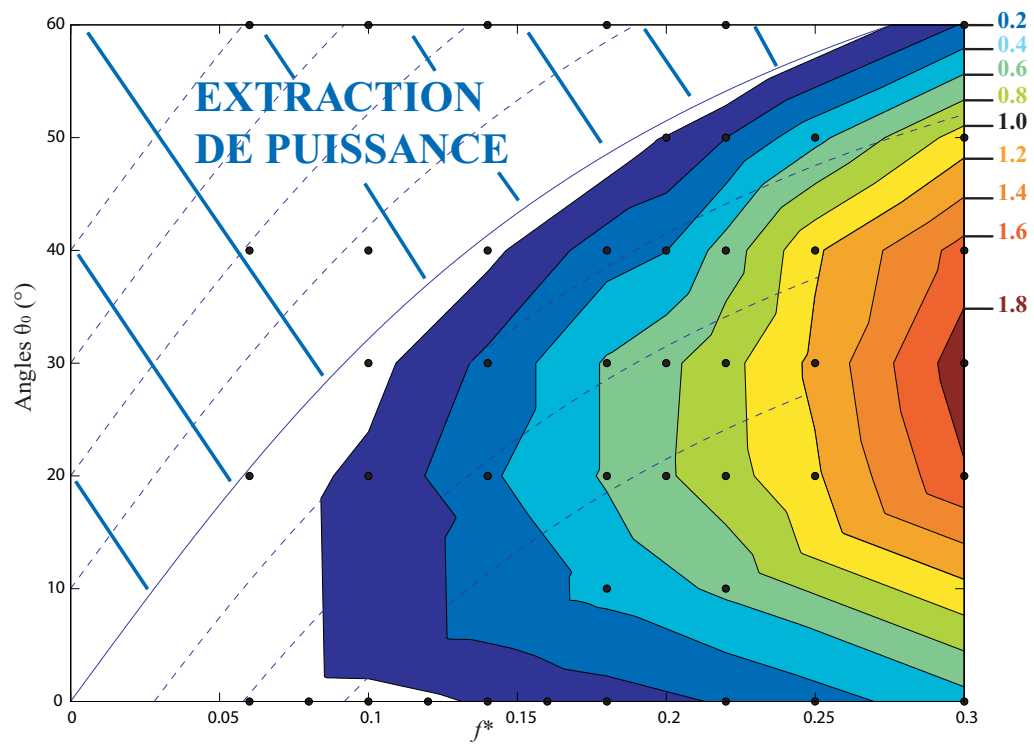


Figure 5.24 Cartographie du coefficient de poussée C_T dans l'espace paramétrique (f^*, θ_0) .

C. Profil flexible oscillant

Analyse dimensionnelle : Afin d'explorer les effets de la flexibilité sur les performances d'un profil oscillant, on introduit une composante structurelle flexible dans le profil NACA0015 représentée par la zone noire sur les images situées dans la colonne de droite de la figure 5.26. L'analyse dimensionnelle diffère alors de celle d'un profil rigide oscillant comme souligné dans la section 3.1.4. Les paramètres physiques de la structure induisent en effet 4 nombres adimensionnels supplémentaires de sorte que le problème étudié est désormais caractérisé par 11 paramètres adimensionnels :

$$U^* = f(x^*, \tilde{t}^*, Re, M_{flex}, C_T, \nu, Eu, D, \theta_0, h_0^*, f^*) \quad (5.4)$$

On considère une structure avec une densité $\rho_s = 1.$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.1.$ Les effets de la variation de sa flexibilité seront étudiés en changeant son module d'Young $E.$ Les conditions aux limites sont identiques à celles indiquées sur la figure 5.19 excepté en ce qui concerne le profil. Le mouvement (*usager*) est imposé sur les frontières intérieures de la structure, tandis que l'interface fluide-structure est traitée de manière implicite sans avoir à imposer de conditions aux limites explicites.

Extraction de puissance : L'impact de l'introduction d'une partie flexible est étudiée pour le cas de référence défini par $(\theta_0 = 60^\circ, f^* = 0.18, h_0 = 1.0).$ On se trouve alors dans le domaine de l'extraction de puissance. Différentes valeurs du module d'Young adimensionnalisés sont étudiées : $E^* = [2.10^2, 2.10^3, 2.10^4, 2.10^6]$ avec un schéma IRK du 1^{er} ordre et un pas de temps $\Delta t = 0.002 \approx T/2800,$ assez petit pour avoir une bonne précision même avec des interactions fluide-structure.

La figure 5.26 présente les champs de pression autour de l'aile rigide et du profil le plus

E^*	P_Y	P_θ	P_{tot}	η_e
2.10^2	0.1868	-0.03996	0.1407	11.73%
2.10^3	0.2113	-0.05998	0.1513	12.61%
2.10^4	0.2137	-0.06540	0.1483	12.36%
2.10^6	0.2137	-0.06611	0.1476	12.31%
RIGIDE	0.2045	-0.06064	0.1439	11.99%

Tableau 5.7 Comparaison des puissances et des efficacités d'extraction de puissance entre des profils rigide et flexible.

flexible étudié ($E^* = 200$). On voit clairement la déformation du bord de fuite due à la flexibilité de la structure sur la figure 5.26. L'effet sur le champ de pression est aussi évident avec sensiblement la même chose au bord d'attaque mais une réduction des gradients de pression au bord de fuite dans le cas flexible. Il est toutefois difficile d'en évaluer les conséquences sur l'extraction de puissance. La figure 5.25 propose une comparaison de la puissance totale (dimensionnelle) pour différentes flexibilités du profil. L'amplitude de même que la puissance de crête diminuent avec la flexibilité. Toutefois, la puissance moyenne extraite peut être améliorée par l'introduction d'une flexibilité comme le montre le tableau 5.7. Ainsi, si on évalue l'efficacité de la même manière que pour le profil rigide (même amplitude d), il existe un module d'Young optimal autour de $E^* = 2.10^3$ qui délivre un meilleur rendement $\eta_e = 12.61\%$ pour l'extraction de puissance que celui du profil rigide $\eta_e = 11.99\%$.

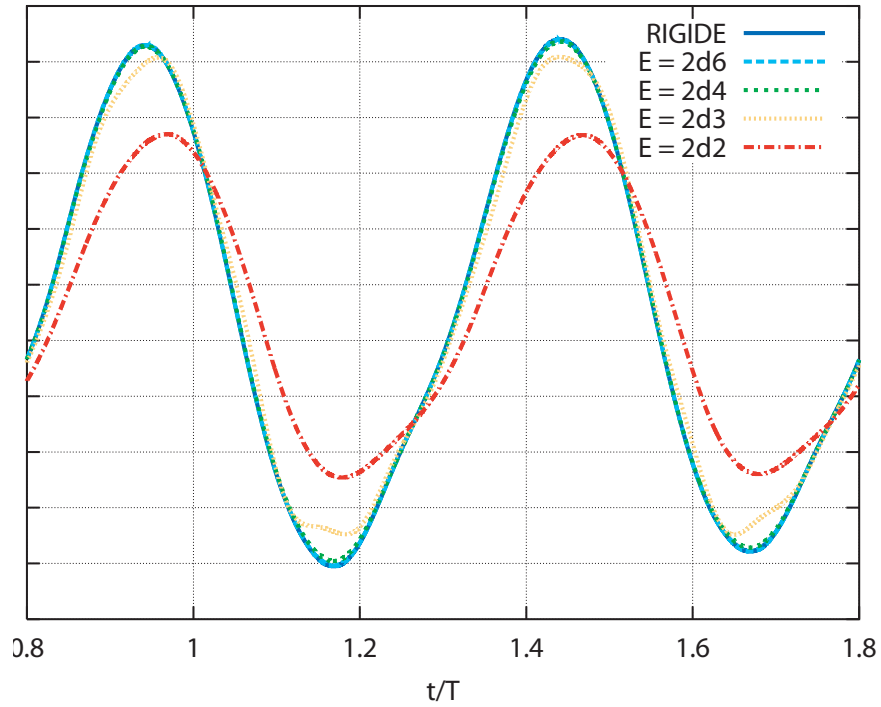


Figure 5.25 Comparaison de la puissance totale instantanée entre des profils rigide et flexibles sur une période de battement.

Propulsion : Enfin, on a obtenu quelques résultats préliminaires de simulation d'un profil flexible oscillant en régime de propulsion pour un cas à haut rendement de propulsion ($\theta_0 = 40^\circ$, $f^* = 0.20$). Par rapport à l'étude précédente, on utilise ici un schéma d'intégration en temps d'ordre 3, IRK3. Le pas de temps reste identique $\Delta t = T/200$ et on étudie 4

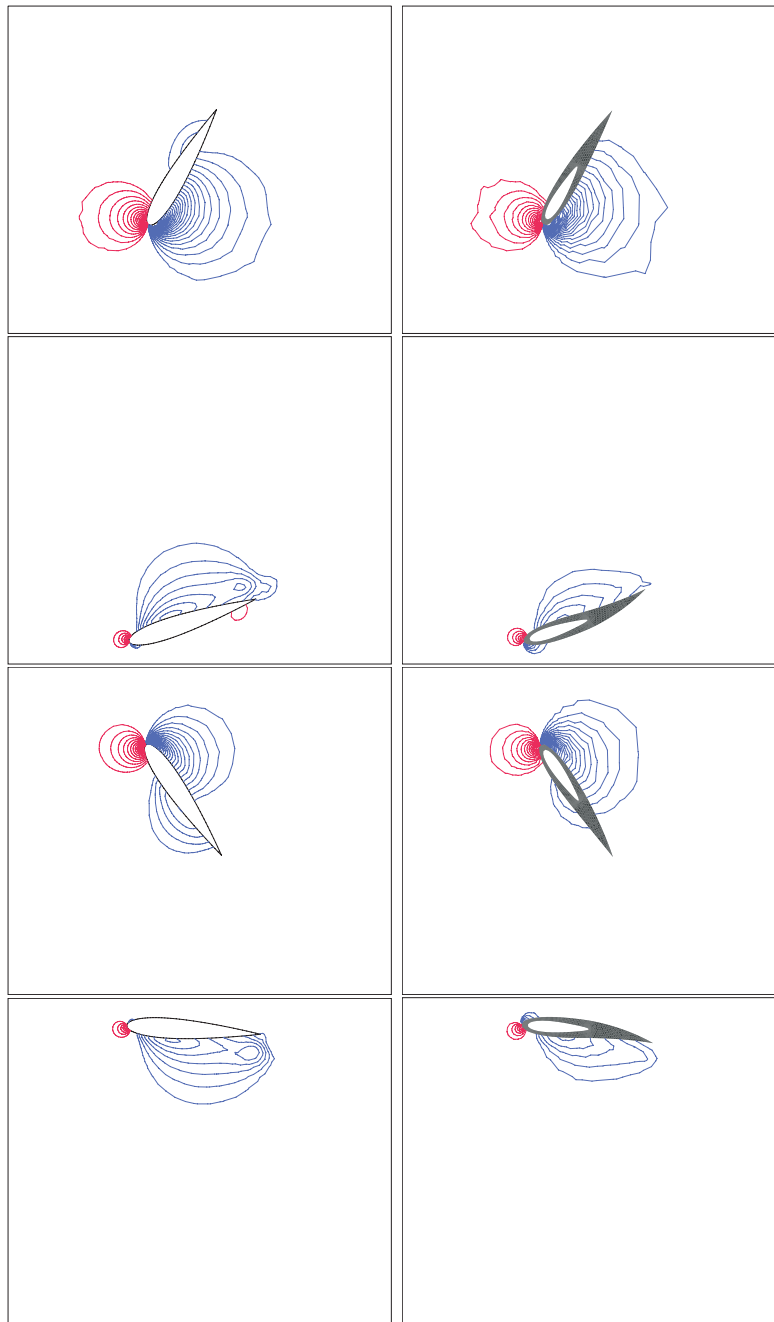


Figure 5.26 Comparaison des champs de pression entre un profil rigide à gauche et un profil flexible ($E = 200$) à droite pour ($f^* = 0.18, \theta_0 = 60^\circ$).

modules d'Young différents : $E^* = [2.10^2, 4.10^2, 10^3, 10^5]$. Dans le cas de la propulsion, on observe aussi sur la figure 5.27 que les valeurs de crête pour la puissance ainsi que pour la poussée diminuent avec la flexibilité. De plus, pour le mouvement considéré, le coefficient de poussée diminue avec la flexibilité puisque les valeurs minimales ne sont que peu affectées alors que les valeurs maximales de poussée sont fortement diminuées.

5.2.3 Conclusion

Dans cette seconde application, on a étudié les performances d'un profil oscillant tant dans le domaine de l'extraction de puissance que dans la propulsion. Un faible nombre de nœuds dans le maillage et des schémas d'intégration en temps performants nous ont permis de mener plusieurs études paramétriques.

Tout d'abord, l'étude des performances d'extraction de puissance d'une aile rigide (NACA0015) oscillante a donné des résultats en très bon accord avec ceux trouvés dans la littérature. La modélisation adoptée est ainsi validée. Ensuite, une seconde étude paramétrique, utilisant des schémas d'intégration en temps d'ordre 3, a permis d'identifier de grandes efficacités de propulsion avec un mouvement optimal du profil. La zone de poussée optimale semble toutefois se situer au-delà des fréquences étudiées ($f^* > 0.3$). Une étude complémentaire semble donc nécessaire pour parachever cette étude paramétrique. Enfin, l'influence de la flexibilité du profil a été explorée sur deux mouvements différents, l'un dans le régime de l'extraction de puissance, l'autre dans le domaine de la propulsion. Une flexibilité optimale semble améliorer l'efficacité d'extraction de puissance pour le mouvement choisi. Dans le domaine de la propulsion, on a seulement présenté des résultats préliminaires utilisant un schéma IRK3. La flexibilité tend à diminuer la poussée disponible mais également la puissance totale. Une étude paramétrique complète de l'impact de la flexibilité sur l'efficacité de propulsion et d'extraction de puissance serait bénéfique pour avoir une vision plus générale des performances de profils flexibles oscillants.

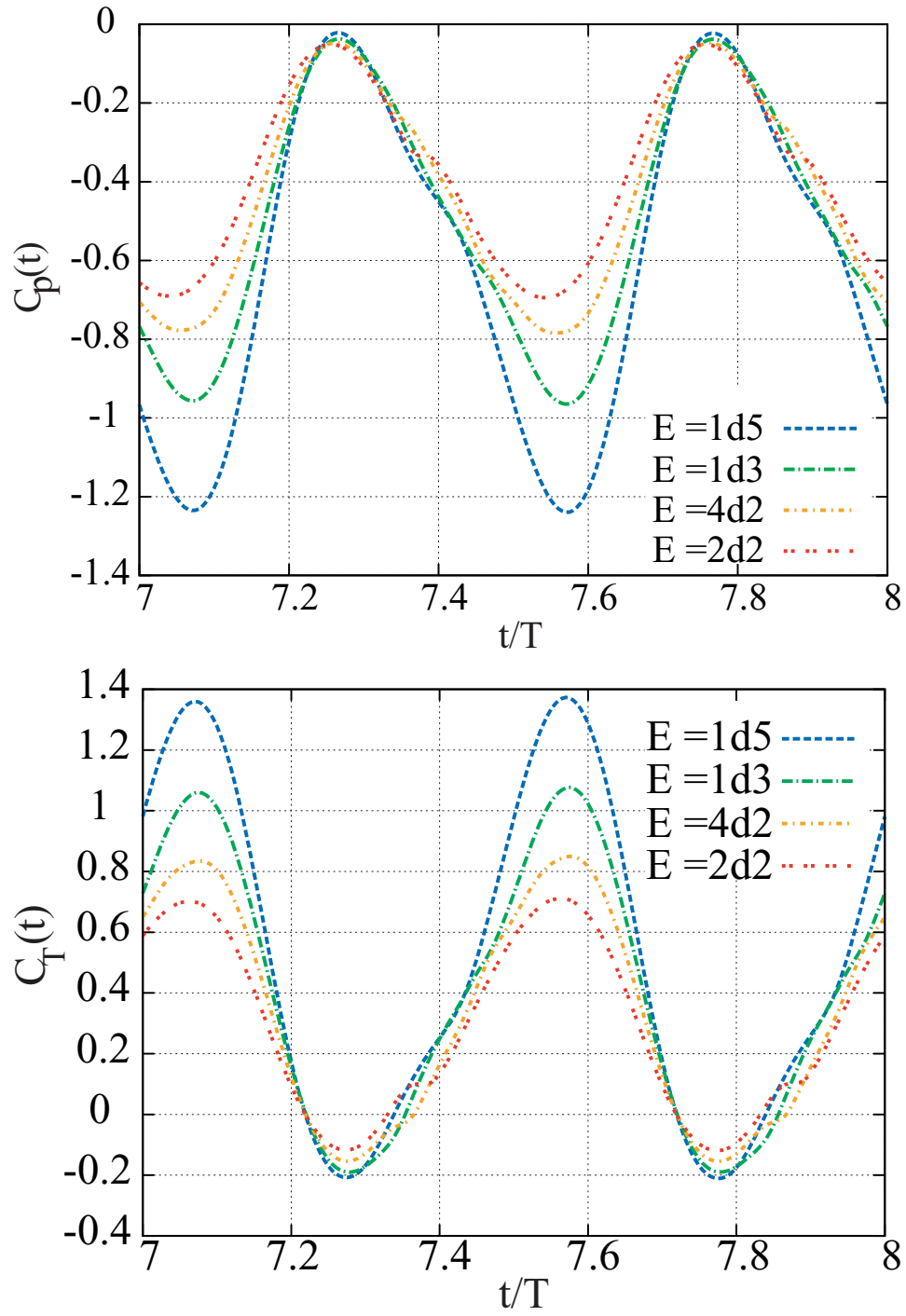


Figure 5.27 Comparaison des coefficients de puissances totales instantanées et de poussée sur une période de battement pour différentes flexibilités du profil : ($f^* = 0.20, \theta_0 = 40^\circ$).

5.3 Profil autopropulsé

Comme dernière application de la méthode développée pour simuler les interactions fluide-structure en grands déplacements, on présente les résultats préliminaires obtenus sur un profil autopropulsé grâce à ces mouvements de battement et de rotation à l'instar d'une aile d'oiseau ou d'une nageoire de baleine. Introduire un mouvement libre du profil (et non plus imposé par une vitesse fictive U_∞ en entrée) rend bien plus réaliste l'étude de la propulsion par un profil oscillant. Toutefois, l'approche classique doit alors être adaptée afin de définir des paramètres adimensionnels et des rendements appropriés, tenant compte de la masse du profil et du fait que la vitesse du fluide à l'infini du fluide U_∞ n'est plus caractéristique du problème puisqu'elle peut être nulle.

5.3.1 Description du cas

A. Analyse dimensionnelle

Suite à l'étude de vérification de la méthodologie sur un profil autopropulsé présentée à la section 4.4, on a appliqué le code numérique développé sur des cas similaires avec différents paramètres de mouvement. Grâce à l'analyse dimensionnelle des interactions fluide-structure présentée à la section 3.1, sept nombres adimensionnels caractérisent le cas d'un profil rigide autopropulsé :

$$U^* = f(x^*, \tilde{t}^*, Re, M_{rigide}, \theta_0, h_0^*, \vartheta) \quad (5.5)$$

En effet, on pose habituellement $p_0 = \rho_f U_0^2$ de sorte que $Eu = 1$ n'est plus caractéristique du problème. On rappelle que le nombre de Reynolds s'exprime alors comme $Re = \rho_f f_0 l_0^2 / \mu_f$ et ϑ définit l'échelle des vitesses : $\vartheta = U_\infty / (f_0 L_0)$.

B. Paramètres du problème

On reprend les mêmes paramètres de mouvement que ceux décrits dans la section 5.2 concernant les profils oscillants. Ainsi, même si le nombre de Reynolds est désormais défini de façon différente, on considère le même fluide (même masse volumique et même viscosité). Par contre, la vitesse d'entrée (U_∞) peut désormais varier, et éventuellement être prise comme nulle. C'est en effet, la vitesse d'avancée du profil autopropulsé qui compte désormais. Ce dernier possède en effet un degré de liberté selon l'axe horizontal lui permettant d'avancer selon l'équation 3.27 (voir figure 5.28).

C. Choix du maillage

Pour faire des comparaisons futures, le maillage est identique à celui utilisé pour l'étape de vérification avec 10 513 nœuds présenté à la section 4.4. Par contre, il est désormais libre de “glisser” avec le profil qui avance. Ainsi, les déplacements horizontaux du pseudo-solide sont libres sur les quatre frontières du domaine comme l'indique la figure 5.28. Ceci permet une déformation du maillage sans aucun repliement.

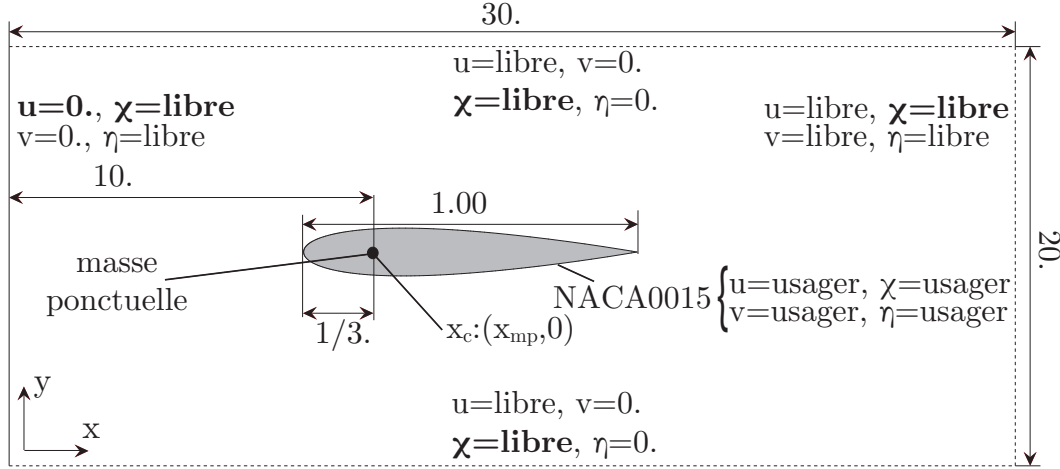


Figure 5.28 Conditions aux limites pour le profil autopropulsé.

5.3.2 Résultats préliminaires

A. Premiers résultats

Les premiers résultats obtenus pour un profil oscillant autopropulsé ont été présentés lors de la vérification du code à la section 4.4 avec $m = 0.30$, $h_0/c = 1.$, $f = 0.18\text{Hz}$ et $\theta_0 = \pi/3$. Avec un schéma d'intégration en temps IRK3 et un pas de temps $\Delta t = 0.1s$, la figure 5.29 expose l'avancée du profil durant 12 périodes de battement avec les isolignes de vitesse horizontale.

B. Influence de la masse

Dans un second temps, on a commencé à étudier l'influence de la masse du profil sur la dynamique du système avec un problème simple. On a considéré un mouvement de battement pur ($\theta_0 = 0$) avec $h_0/c = 0.5$ et $f = 1.\text{Hz}$. Pour le fluide, on a considéré $\rho_f = 4.$ et $\mu_f = 0.04$ ainsi $\text{Re} = \rho_f f_0 l_0^2 / \mu_f = 100$. Pour les profils, deux masses ont été étudiées : $m = 0.30$ et $m = 1.20$. La figure 5.30 présente l'évolution de la vitesse pour ces deux profils. On

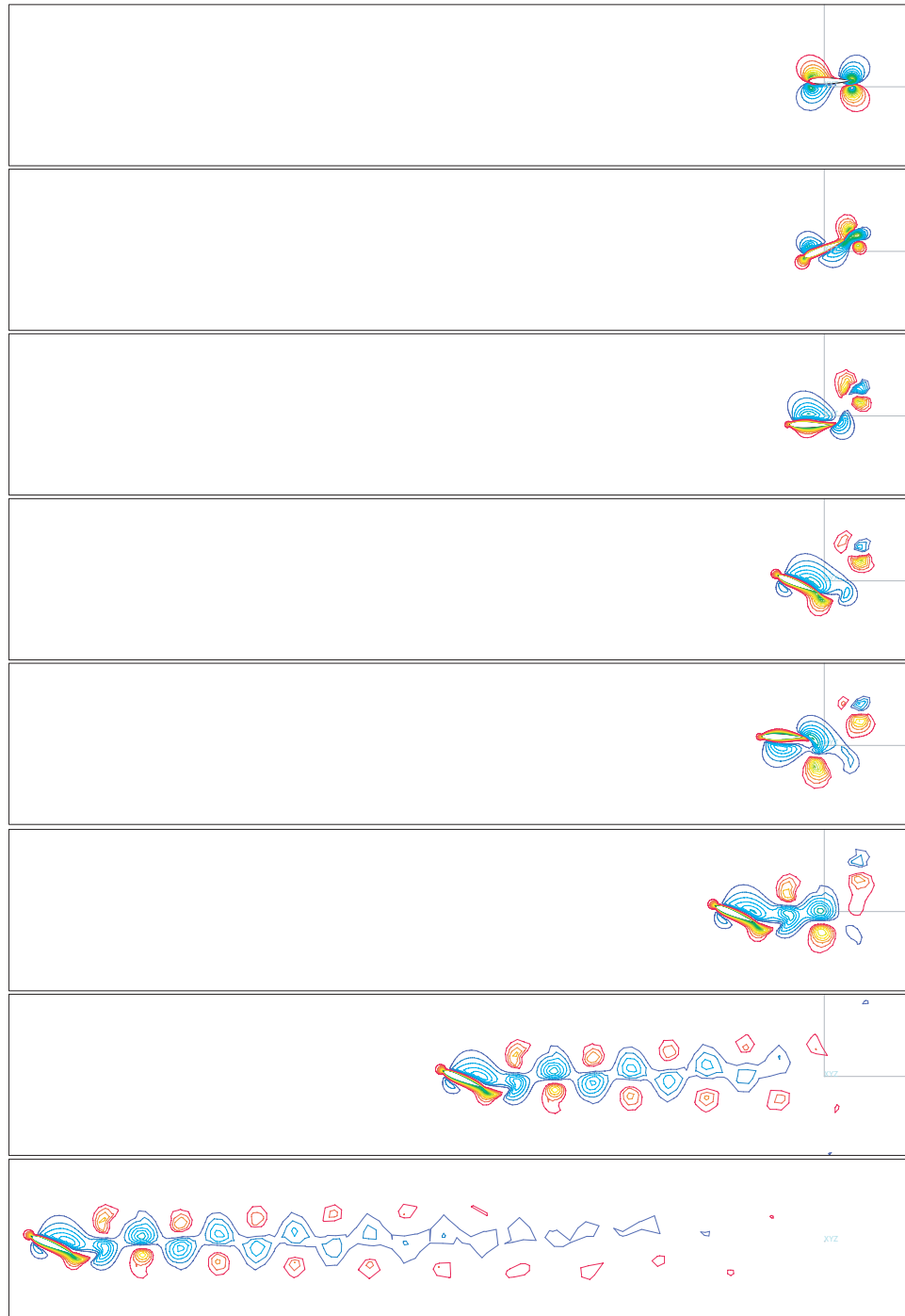


Figure 5.29 Avancée du profil - isolignes de vitesse horizontale U_{mp} pour $t=T/4, T/2, 3T/4, T, 5T/4, 2T, 6T, 12T$.

remarque que, malgré des vitesses de pointe plus élevées, le profil le plus lourd se déplace plus rapidement que le profil avec une masse de $m = 0.30$. Ainsi, même en régime établi, la masse joue un rôle dans la dynamique du profil autopropulsé.

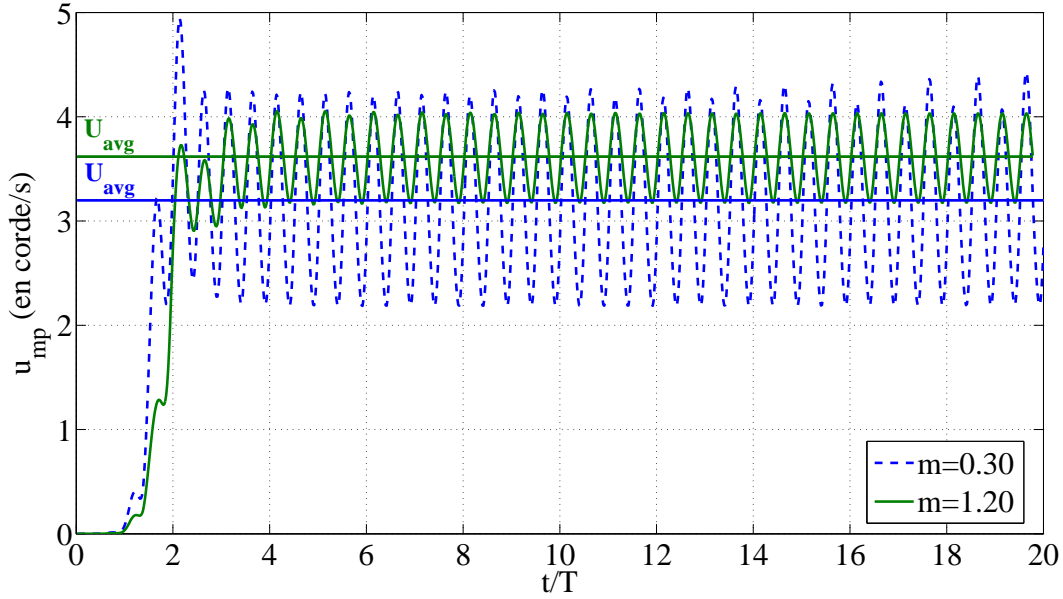


Figure 5.30 Vitesse U_{mp} (en corde/période) des deux profils de masse $m = 0.30$ et $m = 1.20$.

La figure 5.31 représentant les déplacements x_{mp} des deux profils permet de mieux appréhender le régime transitoire. On constate en effet que le profil le plus léger se déplace en premier mais il est rapidement rejoint dans sa course par l'autre profil. Finalement, le profil le plus lourd avance plus vite une fois le régime périodique établi.

5.3.3 Discussion

Cette dernière application de la méthodologie développée a donné les premiers résultats sur l'autopropulsion d'un profil oscillant. Elle ouvre une nouvelle voie de simulation, plus proche des conditions réelles, pour étudier les performances de propulsion. Le déplacement induit du profil est en effet calculé au lieu d'être imposé par une vitesse d'entrée U_∞ . Ceci implique une nouvelle manière d'appréhender les études sur les performances de propulsion. En effet, la définition du nombre de Reynolds doit être revue car U_∞ n'est plus caractéristique du problème. De même, l'efficacité de propulsion ne peut plus s'appuyer sur l'évaluation de la force de poussée qui est équilibrée en régime établi. Par contre, on a

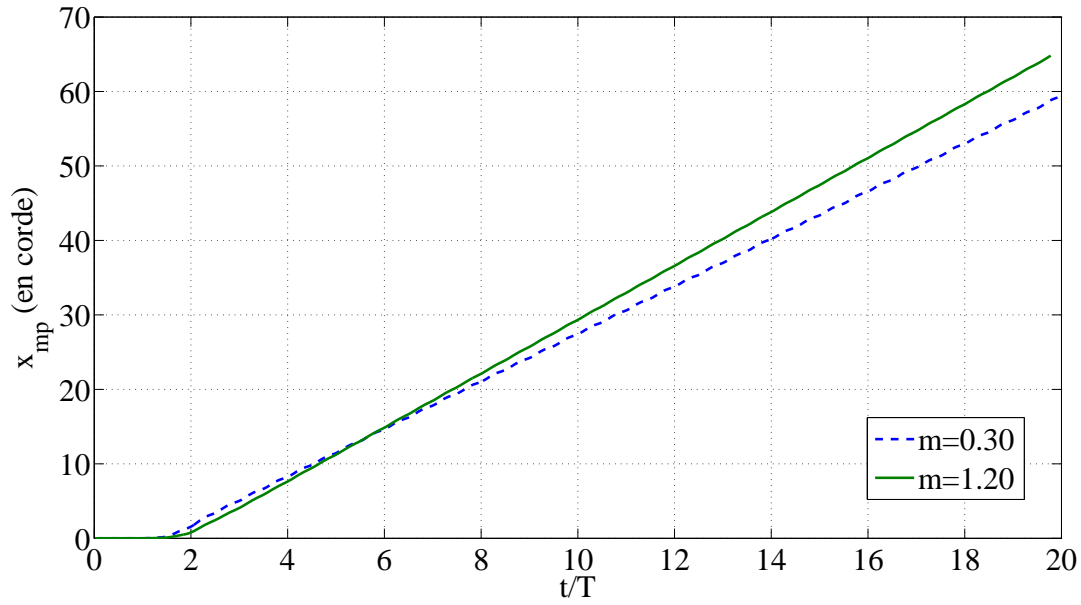


Figure 5.31 Déplacement x_{mp} (en corde) des deux profils de masse $m = 0.30$ et $m = 1.20$.

vu que la masse du profil a une influence sur sa dynamique, même en régime établi. C'est pourquoi, une nouvelle définition du rendement de propulsion devrait désormais prendre en compte la masse du profil.

Ces premiers résultats posent les bases d'une façon plus réaliste de simuler et de quantifier la propulsion d'un profil oscillant. Des études paramétriques pourront alors servir à la comparaison des performances propulsives par rapport à la manière classique présentée à la section 5.2. De plus, il sera intéressant d'étudier l'impact de l'introduction d'une flexibilité du profil dans ce contexte.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Le but de ce projet de thèse était de simuler numériquement des processus d'extraction de puissance d'un écoulement fluide visqueux et de propulsion grâce à un profil flexible en grands déplacements. Pour atteindre ce but, on a mené des travaux originaux en améliorant les techniques de résolution de problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires en grands déplacements. Cette étude par ses limitations, d'ordres théorique et pratique, laisse aussi la porte ouverte à certaines améliorations tout en posant dès maintenant les bases de travaux futurs très prometteurs.

6.1 Synthèse des travaux

On a tout d'abord développé une méthodologie complète pour la simulation numérique d'interactions fluide-structure en grands déplacements basée sur un code informatique de CFD (*Computational Fluid Dynamics*) préexistant. Afin de mieux appréhender les problèmes d'IFS, on a commencé notre projet par une analyse dimensionnelle détaillée permettant d'obtenir les paramètres caractéristiques des cas étudiés. On a ensuite prolongé une formulation monolithique implicite stationnaire des interactions fluide-structure[109] au régime instationnaire. On a ainsi amélioré l'imposition des conditions aux limites pour les frontières en mouvement afin de garantir le traitement totalement implicite du problème. De plus, on a perfectionné la gestion de la déformation du maillage due aux grands déplacements de la structure via une approche pseudo-solide. L'introduction des équations de masse ponctuelle a permis de prendre en compte le mouvement d'ensemble de la structure due aux forces extérieurs. Enfin, des schémas implicites de Runge-Kutta ont été implémentés afin d'améliorer la stabilité et la précision de l'intégration en temps du système d'équations.

Cette méthodologie a donc été implémentée dans un code numérique reposant sur une formulation monolithique directe couplée à des intégrateurs en temps d'ordres élevés. Les équations sont décrites grâce à une formulation d'Euler-Lagrange arbitraire (ALE) conçue pour satisfaire la loi de conservation géométrique (GCL) et ainsi garantir les ordres élevés de précision en temps des intégrateurs, même sur des domaines fluides se déformant. Les équations visqueuses incompressibles de Navier-Stokes pour le fluide, hyperélastiques de Saint-Venant Kirchhoff pour la structure, de Newton pour la masse ponctuelle et d'équilibre

pour les termes de couplage forment un large système monolithique à résoudre. L'approche IFS implicite monolithique utilise des nœuds coïncidents sur les interfaces fluide-structure afin que les efforts, les déplacements et les vitesses soient évaluées au même endroit en un temps identique. Le problème global est résolu de manière implicite grâce à une approche éléments finis de Newton-Raphson utilisant un pseudo-solide. Des intégrateurs en temps implicites de Runge-Kutta (IRK) d'ordres élevés (jusqu'à au 5^e ordre) ont été implémentés pour améliorer la précision et réduire le coût du calcul numérique. Dans le contexte de problèmes raides d'IFS, la présente approche implicite à pas de temps unique est une alternative originale aux formulations traditionnelles à pas multiples ou explicites qui souffrent parfois d'un manque de stabilité.

Le code numérique développé a ensuite été vérifié grâce à 3 études de convergence selon le pas de temps pour : un profil rigide oscillant avec un domaine fluide en déformation, un problème de vibrations induites par l'écoulement d'une lamelle flexible et un profil oscillant autopropulsé. Ces trois études ont montré la stabilité de l'approche proposée même avec de grands pas de temps, l'absence d'oscillations parasites sans ajout de raideur numérique et la conservation de la précision théorique des schémas IRK.

Enfin, on appliqué cette approche numérique performante à trois applications intéressantes. Premièrement, on a étudié les caractéristiques vibratoires d'un problème d'interaction fluide-structure très documenté : une lamelle flexible fixée derrière un cylindre carré rigide. Les résultats obtenus se comparent favorablement avec les précédentes études. La précision des schémas d'intégration IRK (même pour le champ de pression des écoulements incompressibles), leur stabilité inconditionnelle et leur nature non-dissipative ont révélé de nouveaux modes structurels dans les hautes fréquences, faiblement couplés avec l'écoulement. Dans une seconde application, les caractéristiques d'extraction de puissance et de propulsion de profils oscillants rigide et flexible ont été explorées. L'étude des performances d'extraction de puissance d'une aile rigide (NACA0015) oscillante a donné des résultats en très bon accord avec ceux trouvés dans la littérature. Une seconde étude paramétrique a permis d'identifier de grandes efficacités de propulsion avec un mouvement optimal du profil. Une flexibilité optimale semble également améliorer l'efficacité d'extraction de puissance. Enfin, une étude sur l'autopropulsion d'un profil oscillant a donné des résultats préliminaires et a ouvert une nouvelle voie de simulation, plus proche des conditions réelles, pour étudier les performances de propulsion.

6.2 Limitations de l'étude

Malgré la performance de l'approche numérique développée, l'étude menée présente des limitations de deux ordres : théoriques et pratiques. Dès le début de l'étude, on a en effet posé deux hypothèses : l'écoulement considéré est laminaire et en 2D. Bien que justifiées pour certaines applications, ces hypothèses réduisent le champ d'application de la méthodologie développée. L'introduction de modèles de turbulence dans la théorie ainsi que l'extension à la 3D permettraient une étude plus réaliste des phénomènes, notamment dans le cadre des études de propulsion animale où des phénomènes complexes apparaissent en bout d'aile ou de nageoire.

Des contraintes pratiques restreignent également la portée des résultats de cette étude. Tout d'abord, le manque d'espace mémoire n'a pas permis d'utiliser les schémas IRK d'ordres supérieurs à 3 avec des maillages fins (supérieurs à 10 000 nœuds). C'est une des limitations d'une approche totalement implicite lorsqu'on ne dispose pas d'assez de mémoire. Ensuite, on a choisi d'utiliser des cas tests bien documentés pour vérifier le code numérique développé. Ceci a permis en pratique de comparer avantageusement nos résultats avec les études précédentes mais a empêché la comparaison avec une solution exacte dans le processus de vérification. Enfin, les contraintes de temps et de puissance de calcul ont limité les études paramétriques qui nécessitent un grand nombre de calcul. Ainsi, la cartographie des performances propulsives est limitée aux basses fréquences tandis que les études paramétriques pour les profils flexibles et autopropulsés restent encore à faire.

6.3 Travaux et améliorations futures

La présente étude, par ses limitations, laisse la porte ouverte à de nombreuses améliorations mais pose aussi dès maintenant les bases de travaux futurs très prometteurs. La méthodologie pourrait ainsi être améliorée dans trois domaines. Tout d'abord, la modélisation du fluide serait plus réaliste en prenant en compte les phénomènes turbulents et les effets 3D. De même pour la structure, l'introduction d'un amortissement des hautes fréquences rendrait son comportement plus réaliste. Enfin, l'amélioration de la précision des intégrateurs en temps IRK est encore possible, soit en augmentant l'ordre des schémas, soit en améliorant la précision sur la pression (multiplicateur de Lagrange) par modification des coefficients de Butcher [159].

Malgré ces améliorations qu'on pourra apporter plus tard à la méthodologie, on peut dès maintenant mener de nombreux travaux de simulation dont les conclusions auront une

grande portée. Tout d'abord, on pourra compléter les études paramétriques pour les profils rigides, notamment aux fréquences élevées dans le domaine de la propulsion. Ensuite, bien que les schémas IRK d'ordres élevés aient été vérifiés avec d'une part un profil en mouvement et d'autre part une languette déformable, il serait souhaitable de vérifier leur implémentation sur un profil flexible en mouvement. Ainsi, il sera possible de mener une étude paramétrique complète des performances des profils flexibles oscillants. De même, les résultats obtenus pour les profils autopropulsé pourront être étendus à une large gamme de mouvements. Finalement, on pourra comparer précisément les effets de la flexibilité sur les performances des profils oscillants tant en propulsion qu'en extraction de puissance. De même, on étudiera en détails l'influence du mouvement des profils autopropulsé sur l'évaluation de l'efficacité de propulsion.

Enfin, la méthodologie présentée sera une base solide à l'optimisation et au contrôle des phénomènes d'interaction fluide-structure impliqués dans les processus de propulsion ou d'extraction de puissance engendrés par un profil oscillant. L'amélioration du temps de calcul grâce à des intégrateurs en temps performants facilitera grandement l'optimisation et le contrôle. Il restera toutefois à estimer les gradients des fonctions coûts de manière précise et fiable, notamment grâce à la méthode des sensibilités.

Références

- [1] Hairer, E. and Wanner, G., *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems, 2nd revised edition*, Springer, Germany, 2002.
- [2] Kachra, F. and Nadarajah, S. K., “Aeroelastic solutions using the nonlinear frequency-domain method,” *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 9, 2008, pp. 2202 – 2210.
- [3] De Nayer, G., *Interaction Fluide-Structure pour les corps élancés*, Ph.D. thesis, École Centrale Nantes, 2009.
- [4] Kinsey, T. and Dumas, G., “Parametric study of an oscillating airfoil in a power-extraction regime,” *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 6, 2008, pp. 1318 – 30.
- [5] Etienne, S., Pelletier, D., and Garon, A., “A monolithic formulation for unsteady Fluid-structure Interactions,” *Collection of Technical Papers - 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Vol. 11, Reno, NV, 2006, pp. 8301 – 8313.
- [6] Etienne, S., Hay, A., Cori, J.-F., Pelletier, D., and Garon, A., “An unsteady sensitivity equation method for fast evaluation of FSI nearby configurations,” *Collection of Technical Papers - 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Vol. 2, Miami, FL, 2007, pp. 1275 – 1288.
- [7] Shyy, W., Lian, Y., J., Liu, H., Trizila, P., Stanford, B., Bernal, L., Cesnik, C., Friedmann, P., and Ijfu, P., “Computational Aerodynamics of Low Reynolds Number Plunging, Pitching and Flexible Wings for MAV Applications,” *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, Jan. 2008, AIAA Paper 2008-523.
- [8] McCroskey, W. J., “Unsteady airfoils,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 14, 1982, pp. 285 – 311.
- [9] McKinney, W. and DeLaurier, J., “WINGMILL : an oscillating-wing windmill,” *Journal of Energy*, Vol. 5, No. 2, 1981, pp. 109 – 115.
- [10] Childress, S., *Mechanics of swimming and flying*, Cambridge Studies in Mathematical Biology, Cambridge University Press, 1981.
- [11] Azuma, A., *The biokinetics of flying and swimming*, AIAA Educations Series, 2nd ed., 2006.
- [12] Von Loebbecke, A., Mittal, R., Fish, F., and Mark, R., “Propulsive efficiency of the underwater dolphin kick in humans,” *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 131, No. 5, 2009.

- [13] Shyy, W., Berg, M., and Ljungqvist, D., "Flapping and flexible wings for biological and micro air vehicles," *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 35, No. 5, 1999, pp. 455 – 505.
- [14] Triantafyllou, M., Hover, F., Techet, A., and Yue, D., "Review of hydrodynamic scaling laws in aquatic locomotion and fishlike swimming," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 58, 2005, pp. 226 – 236.
- [15] Viieru, D., Tang, J., Lian, Y., Liu, H., and Shyy, W., "Flapping and flexible wing aerodynamics of low reynolds number flight vehicles," *Collection of Technical Papers - 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Vol. 9, Reno, NV, 2006, pp. 6087 – 6104.
- [16] Platzer, M., Jones, K., Young, J., and Lai, J., "Flapping-wing aerodynamics : Progress and challenges," *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 9, 2008, pp. 2136 – 49.
- [17] von Ellenrieder, K., Parker, K., and Soria, J., "Fluid mechanics of flapping wings," *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 32, No. 8, 2008, pp. 1578 – 1589.
- [18] Shyy, W., Aono, H., P., T., Kang, C.-K., Cesnik, C., and Liu, H., "Recent progress in flapping wing aerodynamics and aeroelasticity," *Prog Aerospace Sci*, 2010, doi :10.1016/j.paerosci.2010.01.001.
- [19] Liu, P. and Bose, N., "Propulsive Performance from Oscillating Propulsors with Span-wise Flexibility," *Proceedings of the Royal Society of London, Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 453, The Royal Society, 1997, pp. 1763–1770.
- [20] Stanford, B., Sytsma, M., Albertani, R., Viieru, D., Shyy, W., and Ifju, P., "Static aeroelastic model validation of membrane micro air vehicle wings," *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 12, 2007, pp. 2828 – 2837.
- [21] Shyy, W. and Liu, H., "Flapping wings and aerodynamic lift : the role of leading-edge vortices," *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 12, 2007, pp. 2817 – 19.
- [22] Neef, M. F. and Hummel, D., "Euler solutions for finite-span flapping wing," *Fixed and flapping wing aerodynamics for micro air vehicle applications*, edited by T. J. Mueller, Vol. 195 of *Progress in astronautics and aeronautics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001, pp. 429–451.
- [23] Young, J., *Numerical simulation of the unsteady aerodynamics of flapping airfoils*, Ph.D. thesis, University of New South Wales - Australian Defence Force Academy, 2005.
- [24] Wang, J., "Vortex shedding and frequency selection in flapping flight," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 410, 2000, pp. 323 – 41.
- [25] Julien, S. and Dumas, G., "URANS simulations of high amplitude flapping airfoils," *Proceedings of the 15th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, Toronto, ON, 2007.

- [26] Young, J. and Lai, J., "Oscillation frequency and amplitude effects on the wake of a plunging airfoil," *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 10, 2004, pp. 2042 – 2052.
- [27] Jones, K., Lindsey, K., and Platzer, M., "An investigation of the fluid-structure interaction in an oscillating-wing micro-hydropower generator," *Advances in Fluid Mechanics*, Vol. 36, Cadiz, Spain, 2003, pp. 73 – 82.
- [28] Jones, K. D. and Platzer, M. F., "Numerical Computation of Flapping-Wing Propulsion and Power Extraction," *AIAA Paper*, 1997, AIAA Paper 1997-0826.
- [29] Davids, S. T., "A computational and experimental investigation of a flutter generator," 1999.
- [30] Lindsey, K., "A feasibility study of oscillating-wing power generators," 2002.
- [31] Kinsey, T. and Dumas, G., "Parametric study of an oscillating airfoil in power extraction regime," *Collection of Technical Papers - AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Vol. 1, San Francisco, CA, United States, 2006, pp. 298 – 316.
- [32] Tuncer, I. H. and Platzer, M. F., "Thrust generation due to airfoil flapping," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 2, 1996, pp. 324 – 331.
- [33] Anderson, J., Streitlien, K., Barrett, D., and Triantafyllo, M., "Oscillating foils of high propulsive efficiency," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 360, 1998, pp. 41 – 72.
- [34] Schouveiler, L., Hover, F., and Triantafyllou, M., "Performance of flapping foil propulsion," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 20, No. 7, 2005, pp. 949 – 59.
- [35] Miao, J.-M. and Ho, M.-H., "Effect of flexure on aerodynamic propulsive efficiency of flapping flexible airfoil," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 22, No. 3, 2006, pp. 401 – 419.
- [36] Kaya, M. and Tuncer, I. H., "Nonsinusoidal path optimization of a flapping airfoil," *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 8, 2007, pp. 2075 – 2082.
- [37] Alben, S., "Optimal flexibility of a flapping appendage in an inviscid fluid," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 614, 2008, pp. 355 – 380.
- [38] Heathcote, S., Wang, Z., and Gursul, I., "Effect of spanwise flexibility on flapping wing propulsion," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 24, No. 2, 2008, pp. 183 – 99.
- [39] Windte, J. and Radespiel, R., "Propulsive efficiency of a moving airfoil at transitional low Reynolds numbers," *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 9, 2008, pp. 2165 – 77.
- [40] Ashraf, M. A., Young, J., and Lai, J. C. S., "Effect of airfoil thickness, camber and Reynolds number on plunging airfoil propulsion," *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Orlando, FL, Jan. 2009, AIAA Paper 2009-1274.

- [41] Gopalakrishnan, P. and Tafti, D., “Effect of Rotation Kinematics and Angle of Attack on Flapping Flight,” *AIAA Journal*, Vol. 47, No. 11, 2009, pp. 2505 – 19.
- [42] Guerrero, J. E., “Effect of Cambering on the Aerodynamic Performance of Heaving Airfoils,” *Journal of Bionic Engineering*, Vol. 6, No. 4, 2009, pp. 398 – 407.
- [43] Gulcat, U., “Propulsive force of a flexible flapping thin airfoil,” *Journal of Aircraft*, Vol. 46, No. 2, 2009, pp. 465 – 73.
- [44] Shin, S., Bae, S. Y., Kim, I. C., and Kim, Y. J., “Effects of flexibility on propulsive force acting on a heaving foil,” *Ocean Engineering*, Vol. 36, No. 3-4, 2009, pp. 285 – 294.
- [45] Pereira, J., Maia, N., and Pereira, J., “A Computational Fluid Dynamics Study of a 2D Airfoil in Hovering Flight Under Ground Effect,” *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 49, No. 2, 2009, pp. 113 – 41.
- [46] Jardin, T., Chatellier, L., Farcy, A., and David, L., “Correlation between vortex structures and unsteady loads for flapping motion in hover,” Vol. 47, Heidelberg, Deutschland, 2009, pp. 655 – 664.
- [47] Tang, J., Viem, D., and Shyy, W., “Effects of Reynolds number and flapping kinematics on hovering aerodynamics,” *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 4, 2008, pp. 967 – 76.
- [48] Fish, F. E., “Transitions from Drag-based to Lift-based Propulsion in Mammalian Swimming,” *American Zoologist*, Vol. 36, No. 6, 1996, pp. 628–641.
- [49] Barrett, D., Triantafyllou, M., Yue, D., Grosenbaugh, M., and Wolfgang, M., “Drag reduction in fish-like locomotion,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 392, 1999, pp. 183 – 212.
- [50] Taylor, G. K., Nudds, R. L., and Thomas, A. L. R., “Flying and swimming animals cruise at a Strouhal number tuned for high power efficiency,” *Nature*, Vol. 425, No. 6959, 2003, pp. 707 – 711.
- [51] Nagai, H., Isogai, K., Fujimoto, T., and Hayase, T., “Experimental and numerical study of forward flight aerodynamics of insect flapping wing,” *AIAA Journal*, Vol. 47, No. 3, 2009, pp. 730 – 742.
- [52] Yeo, K., Ang, S., and Shu, C., “Simulation of fish swimming and manoeuvring by an SVD-GFD method on a hybrid meshfree-Cartesian grid,” *Computers and Fluids*, Vol. 39, No. 3, 2010, pp. 403 – 430.
- [53] Zhu, Q., Wolfgang, M., Yue, D., and Triantafyllou, M., “Three-dimensional flow structures and vorticity control in fish-like swimming,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 468, 2002, pp. 1 – 28.

- [54] Tuncer, I. and Kaya, M., “Optimization of flapping airfoils for maximum thrust and propulsive efficiency,” *AIAA Journal*, Vol. 43, No. 11, 2005, pp. 2329 – 36.
- [55] Leroyer, A. and Visonneau, M., “Numerical methods for RANSE simulations of a self-propelled fish-like body,” *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 20, No. 7, 2005, pp. 975 – 91.
- [56] Hu, W.-r., Tong, B.-g., and Liu, H., “Dynamics of free straight swimming of anguilla anguilla including forward, braking and backward locomotion,” *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 19, No. 4, 2007, pp. 395 – 402.
- [57] Tang, J., Chimakurthi, S., Palacios, R., Cesnik, C., and Shyy, W., “Computational fluid-structure interaction of a deformable flapping wing for micro air vehicle applications,” *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, Jan. 2008, AIAA Paper 2008-615.
- [58] Chimakurthi, S., Tang, J., Palacios, R., Cesnik, C., and Shyy, W., “Computational aeroelasticity framework for analyzing flapping wing micro air vehicles,” *AIAA Journal*, Vol. 47, No. 8, 2009, pp. 1865 – 78.
- [59] Jones, K. D. and Platzler, M. F., “Design and development considerations for biologically inspired flapping-wing micro air vehicles,” *Experiments in Fluids*, Vol. 46, No. 5, 2009, pp. 799 – 810.
- [60] Wolf, M. I., Licht, S. C., Hover, F., and Triantafyllou, M. S., “Open loop swimming performance of ‘finnegan’ the biomimetic flapping foil AUV,” San Francisco, CA, 2006, pp. 247 – 253.
- [61] Larijani, R. F. and DeLaurier, J., “A nonlinear aeroelastic model for the study of flapping wing flight,” *Fixed and flapping wing aerodynamics for micro air vehicle applications*, edited by T. J. Mueller, Vol. 195 of *Progress in astronautics and aeronautics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001, pp. 399–428.
- [62] Kaya, M. and Tuncer, I. H., “Nonsinusoidal path optimization of a flapping airfoil,” *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 8, 2007, pp. 2075–2082.
- [63] Berman, G. J. and Wang, Z. J., “Energy-minimizing kinematics in hovering insect flight,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 582, 2007, pp. 153 – 168.
- [64] Gogulapati, A., Friedmann, P., and Shyy, W., “Nonlinear aeroelastic effects in flapping wing micro air vehicles,” *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Schaumburg, IL, United States, 2008, pp. 2008 – 1817.

- [65] Cho, J., Lee, H., and Han, C., “Unsteady aerodynamics of dual biofoils,” *Collection of Technical Papers - AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Vol. 1, San Francisco, CA, United States, 2006, pp. 353 – 361.
- [66] Ramamurti, R., Sandberg, W., Vaiana, P., Kellogg, J., and Cylinder, D., “Computational fluid dynamics study of unconventional air vehicle configurations,” *Aeronautical Journal*, Vol. 109, No. 1097, 2005, pp. 337 – 347.
- [67] Bosch, H., “Interfering airfoils in two-dimensional unsteady incompressible flow,” *AGARD Conference Proceedings No. 227. Unsteady Aerodynamics*, Ottawa, Ont., Canada, 1978.
- [68] Zhu, Q., Haase, M., and Wu, C. H., “Modeling the capacity of a novel flow-energy harvester,” *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 5, 2009, pp. 2207 – 2217.
- [69] Murray, M. and Howle, L., “Spring stiffness influence on an oscillating propulsor,” *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 17, No. 7, 2003, pp. 915 – 926.
- [70] Guglielmini, L. and Blondeaux, P., “Propulsive efficiency of oscillating foils,” *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, Vol. 23, No. 2, 2004, pp. 255 – 278.
- [71] Pesavento, U. and Wang, Z. J., “Flapping Wing Flight Can Save Aerodynamic Power Compared to Steady Flight,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 103, No. 11, Sep 2009, pp. 118102.
- [72] Lai, J. and Platzer, M., “Jet characteristics of a plunging airfoil,” *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 12, 1999, pp. 1529 – 1537.
- [73] Ramamurti, R. and Sandberg, W., “Simulation of flow about flapping airfoils using finite element incompressible flow solver,” *AIAA journal*, Vol. 39, No. 2, 2001, pp. 253 – 258.
- [74] Sahoo, D., Bowersox, R., and Goss, L., “Experimental Investigation of the Leading-Edge Flow of a Dynamically Pitching Airfoil,” *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2008, AIAA Paper 2008-651.
- [75] Ellington, C., van den Berg, C., Willmott, A., and Thomas, A., “Leading-edge vortices in insect flight,” *Nature*, Vol. 384, No. 6610, 1996, pp. 626 –.
- [76] Cebeci, T., Platzer, M., Chen, H., Chang, K.-C., and Shao, J. P., *Analysis of low-speed unsteady airfoil flows*, Horizons Publishing - Springer, Long Beach, CA, 2005.
- [77] Tuncer, I. H., Wu, J. C., and Wang, C., “Theoretical and numerical studies of oscillating airfoils,” *AIAA journal*, Vol. 28, No. 9, 1990, pp. 1615 – 1624.
- [78] Sarkar, S. and Venkatraman, K., “Influence of pitching angle of incidence on the dynamic stall behavior of a symmetric airfoil,” *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Vol. 27, No. 3, 2008, pp. 219 – 38.

- [79] Altshuler, D. L., Princevac, M., Pan, H., and Lozano, J., "Wake patterns of the wings and tail of hovering hummingbirds," *Experiments in Fluids*, Vol. 46, No. 5, 2009, pp. 835 – 846.
- [80] Read, D., Hover, F., and Triantafyllou, M., "Forces on oscillating foils for propulsion and maneuvering," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 17, No. 1, 2003, pp. 163 – 183.
- [81] Triantafyllou, M., Techet, A., and Hover, F., "Review of experimental work in biomimetic foils," *IEEE J. Ocean. Eng.*, Vol. 29, No. 3, 2004, pp. 585 – 94.
- [82] Ansari, S. A., Phillips, N., Stabler, G., Wilkins, P. C., Zbikowski, R., and Knowles, K., "Experimental investigation of some aspects of insect-like flapping flight aerodynamics for application to micro air vehicles," *Experiments in Fluids*, Vol. 46, No. 5, 2009, pp. 777 – 798.
- [83] Heathcote, S. and Gursul, I., "Flexible flapping airfoil propulsion at low Reynolds numbers," *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 5, 2007, pp. 1066 – 79.
- [84] Heathcote, S. and Gursul, I., "Jet switching phenomenon for a periodically plunging airfoil," *Physics of Fluids*, Vol. 19, No. 2, 2007, pp. 27104 – 1.
- [85] Mazaheri, K. and Ebrahimi, A., "Experimental study on interaction of aerodynamics with flexible wings of flapping vehicles in hovering and cruise flight," *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 11, 2010, pp. 1255 – 1269.
- [86] Simpson, B. J., Hover, F. S., and Triantafyllou, M. S., "Experiments in direct energy extraction through flapping foils," Vancouver, BC, Canada, 2008, pp. 370 – 376.
- [87] McGowan, G. Z., Gopalarathnam, A., Ol, M. V., Edwards, J. R., , and Fredberg, D., "Computation vs. Experiment for High-Frequency Low-Reynolds Number Airfoil Pitch and Plunge," *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, Jan. 2008, AIAA Paper 2008-653.
- [88] Katz, J., "Discrete vortex method for the non-steady separated flow over an airfoil." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 102, 1981, pp. 315 – 328.
- [89] Streitlien, K. and Triantafyllou, G., "On thrust estimates for flapping foils," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 12, No. 1, 1998, pp. 47 – 55.
- [90] Blondeaux, P., Fornarelli, F., Guglielmini, L., Triantafyllou, M., and Verzicco, R., "Numerical experiments on flapping foils mimicking fish-like locomotion," *Physics of Fluids*, Vol. 17, No. 11, 2005, pp. 113601 – 1.
- [91] Platzer, M. F. and Jones, K. D., "Flapping wing aerodynamics - Progress and challenges," *Collection of Technical Papers - 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Vol. 9, Reno, NV, 2006, pp. 6051 – 6069.

- [92] Isaac, K., Rolwes, J., and Colozza, A., “Aerodynamics of a flapping and pitching wing using simulations and experiments,” *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 6, 2008, pp. 1505 – 15.
- [93] Visbal, M., “High-Fidelity Simulation of Transitional Flows past a Plunging Airfoil,” *AIAA Journal*, Vol. 47, No. 11, 2009, pp. 2685 – 97.
- [94] Sudhakar, Y. and Vengadesan, S., “Flight force production by flapping insect wings in inclined stroke plane kinematics,” *Computers and Fluids*, Vol. 39, No. 4, 2010, pp. 683 – 95.
- [95] Garrick, I., “Propulsion of flapping and oscillating airfoil,” *National Advisory Committee for Aeronautics – Reports*, 1936, pp. 9 –.
- [96] Theodorsen, T., “General theory of aerodynamic instability and mechanism of flutter,” *National Advisory Committee for Aeronautics – Reports*, 1935, pp. 23 –.
- [97] Ansari, S., Zbikowski, R., and Knowles, K., “Non-linear unsteady aerodynamic model for insect-like flapping wings in the hover. Part 1 : methodology and analysis,” .
- [98] Ansari, S., Zbikowski, R., and Knowles, K., “Non-linear unsteady aerodynamic model for insect-like flapping wings in the hover. Part 2 : Implementation and validation,” .
- [99] Ellington, C. P., “The Aerodynamics of Hovering Insect Flight.” *Royal Society of London Philosophical Transactions Series B*, Vol. 305, Feb. 1984, pp. 1–181.
- [100] Mueller, T. J., *Fixed and flapping wing aerodynamics for micro air vehicle applications*, Vol. 195 of *Progress in astronautics and aeronautics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001.
- [101] Zhu, Q., “Numerical simulation of a flapping foil with chordwise or spanwise flexibility,” *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 10, 2007, pp. 2448 – 57.
- [102] Dumas, G. and Kinsey, T., “Eulerian simulations of oscillating airfoils in power extraction regime,” *Advances in Fluid Mechanics VI*, Southampton, UK, 2006, pp. 10 pp. –.
- [103] Tang, J., Viieru, D., and Shyy, W., “A study of aerodynamics of low reynolds number flexible airfoils,” Vol. 2, Miami, FL, 2007, pp. 1465 – 1481.
- [104] Chung, M.-H., “Numerical study of rowing hydrofoil performance at low Reynolds numbers,” *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 24, No. 3, 2008, pp. 313 – 335.
- [105] Xiao, Q. and Liao, W., “Numerical investigation of angle of attack profile on propulsion performance of an oscillating foil,” *Computers and Fluids*, Vol. 39, No. 8, 2010, pp. 1366 – 1380.

- [106] Sarkar, S. and Venkatraman, K., “Numerical simulation of thrust generating flow past a pitching airfoil,” *Computers and Fluids*, Vol. 35, No. 1, 2006, pp. 16 – 42.
- [107] Soueid, H., Guglielmini, L., Airiau, C., and Bottaro, A., “Optimization of the motion of a flapping airfoil using sensitivity functions,” *Computers and Fluids*, Vol. 38, No. 4, 2009, pp. 861 – 74.
- [108] Mittal, R., Dong, H., Bozkurttas, M., Von, Loebbecke, A., and Najjar, F., “Analysis of flying and swimming in nature using an immersed boundary method,” Vol. 1, San Francisco, CA, United states, 2006, pp. 23 – 30.
- [109] Cori, J.-F., *Contribution à l’analyse et au design optimal de phénomènes d’interactions fluides-structures*, Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada, 2007.
- [110] Heil, M., “Stokes Flow in an Elastic Tube - A Large-Displacement Fluid-Structure Interaction Problem,” *Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 28, 1998, pp. 243–265.
- [111] Moller, H. and Lund, E., “Shape sensitivity analysis of strongly coupled fluid-structure interaction problems,” *8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO symposium on multidisciplinary analysis and optimization*, Long Beach, CA, September 2000, AIAA Paper 2000-4823.
- [112] Farhat, C., Degand, C., Koobus, B., and Lesoinne, M., “Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes,” *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 163, 1998, pp. 231–245.
- [113] Degand, C. and Farhat, C., “A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes,” *Computers and Structures*, Vol. 80, 2001, pp. 305–316.
- [114] Fernandez, M. A. and Moubachir, M., “A Newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling,” *Computers and Structures*, Vol. 83, 2005, pp. 127–142.
- [115] Lund, E., Moller, H., and Jakobsen, L. A., “Shape design optimization of steady fluid-structure interaction problems with large displacements,” *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, Seattle, Washington, April 2001, AIAA Paper 2001-1624.
- [116] Lund, E., Moller, H., and Jakobsen, L. A., “Shape design optimization of stationary fluid-structure interaction problems with large displacements and turbulence,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 25, 2003, pp. 383–392.
- [117] Lohner, R. and Yang, C., “Improved ALE Mesh Velocities for Moving Bodies,” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, 1996, pp. 599–608.

- [118] Chiandussi, G., Bugada, G., and Oñate, E., “A simple method for automatic update of finite element meshes,” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 16, 2000, pp. 1–19.
- [119] Oñate, E. and Garcia, J., “A finite element method for fluid-structure interaction with surface waves using a finite calculus formulation,” *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 191, 2001, pp. 635–660.
- [120] Nielsen, E. J. and Anderson, W. K., “Recent improvements in Aerodynamic Design Optimization on Unstructured Meshes,” *39th AIAA Aerospace Science Meeting*, Reno, NV, January 2001, AIAA Paper 2001-0596.
- [121] Sackinger, P. A., Schunk, P. R., and Rao, R. R., “A Newton-Raphson Pseudo-Solid Domain Mapping Technique for Free and Moving Boundary Problems : A Finite Element Implementation,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 125, 1996, pp. 83–103.
- [122] Etienne, S. and Pelletier, D., “An Updated Lagrangian Monolithic Formulation for Steady-State Fluid-Structure Interaction Problems,” *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2005, AIAA Paper 2004-2239.
- [123] Turgeon, É., *Méthode d’Éléments Finis Adaptative pour la Résolution des Sensibilités d’écoulements*, Ph.D. thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, 2001.
- [124] Hughes, T. and Hulbert, G., “Space-time finite element methods for elastodynamics : formulations and error estimates,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, No. 3, 1988, pp. 339 – 63.
- [125] Hughes, T., Franca, L., and Hulbert, G., “A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 73, No. 2, 1989, pp. 173 – 89.
- [126] Lesoinne, M. and Farhat, C., “Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations,” *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineer.*, Vol. 134, 1996, pp. 71–90.
- [127] Page, M., Dickinson, R., Garon, A., and Pelletier, D., “An analysis of the topology of the flow around an oscillating airfoil,” Fredericton, NB, Canada, 1991.
- [128] Etienne, S., Garon, A., and Pelletier, D., “Perspective on the Geometric Conservation Law and Finite Element Methods for ALE Simulations of Incompressible Flow,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, 2009, pp. 2313–2333.
- [129] Lacroix, M. and Garon, A., “Numerical solution of phase change problems : an eulerian-lagrangian approach,” *Num. Heat Trans.*, Vol. 19, 1992, pp. 57–78.

- [130] Zhang, H., Reggio, M., Trepanier, J., and Camarero, R., “Discrete form of the GCL and its implementation in CFD codes,” *Computers and fluids*, Vol. 22, 1993, pp. 9–23.
- [131] Farhat, C., Geuzaine, P., and Grandmont, C., “The discrete Geometric Conservation Law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 174, 2001, pp. 669–694.
- [132] Demirdzic, I. and Perić, M., “Space conservation law in finite volume calculation of fluid flow,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, 1988, pp. 1037–1050.
- [133] Katz, J. and Weihs, D., “Hydrodynamic propulsion by large amplitude oscillation of an airfoil with chordwise flexibility,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 88, No. pt 3, 1978, pp. 485 – 497.
- [134] Toomey, J. and Eldredge, J. D., “Numerical and experimental investigation of the role of flexibility in flapping wing flight,” *Collection of Technical Papers - 36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, Vol. 2, San Francisco, CA, 2006, pp. 774 – 787.
- [135] Daniel, T. and Combes, S., “Flexing wings and fins : bending by inertial or fluid-dynamic forces?” *Int. Comp. Biol.*, Vol. 42, No. 5, 2002, pp. 1044–1049.
- [136] Tay, W. and Lim, K., “Numerical analysis of active chordwise flexibility on the performance of non-symmetrical flapping airfoils,” *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 26, No. 1, 2010, pp. 74 – 91.
- [137] Blom, F., *Investigations on computational fluid-structure interaction*, Ph.D. thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1998.
- [138] Tang, D. and Dowell, E. H., “Aeroelastic airfoil with free play at angle of attack with gust excitation,” Vol. 48, 2010, pp. 427 – 442.
- [139] Etienne, S., Fontaine, E., and Scolan, Y.-M., “Vortex- and wake-induced vibrations of two and three cylinders arranged in-line,” Osaka, Japan, 2009, pp. 1358 – 1364.
- [140] Farnell, D., David, T., and Barton, D., “Numerical model of self-propulsion in a fluid,” *Journal of The Royal Society Interface*, Vol. 2, No. 2, 2005, pp. 79–88.
- [141] Peng, Z. and Zhu, Q., “Energy harvesting through flow-induced oscillations of a foil,” *Physics of Fluids*, Vol. 21, No. 12, 2009, pp. 1 – 9.
- [142] Shirgaonkar, A., MacIver, M., and Patankar, N., “A new mathematical formulation and fast algorithm for fully resolved simulation of self-propulsion,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 7, 2009, pp. 2366 – 90.
- [143] Borazjani, I. and Sotiropoulos, F., “Numerical investigation of the hydrodynamics of carangiform swimming in the transitional and inertial flow regimes,” *J Exp Biol*, Vol. 211, No. 10, 2008, pp. 1541–1558.

- [144] Pederzani, J. and Haj-Hariri, H., “A numerical method for the analysis of flexible bodies in unsteady viscous flows,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 68, No. 10, 2006, pp. 1096 – 112.
- [145] Michelin, S. and Llewellyn Smith, S., “Resonance and propulsion performance of a heaving flexible wing,” *Physics of Fluids*, Vol. 21, No. 7, 2009, pp. 071902.
- [146] Bidkar, R., Kimber, M., Raman, A., Bajaj, A., and Garimella, S., “Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan-Carpenter numbers,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 634, 10 Sept. 2009, pp. 269 – 89.
- [147] Gopalakrishnan, P. and Tafti, D. K., “Effect of wing flexibility on lift and thrust production in flapping flight,” *AIAA Journal*, Vol. 48, No. 5, 2010, pp. 865 – 877.
- [148] Etienne, S. and Pelletier, D., “A Monolithic Formulation for Steady-State Fluid-Structure Interaction Problems,” *34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Portland, Oregon, June 2004, AIAA Paper 2004-2239.
- [149] Hübner, B., Walhorn, E., and Dinkler, D., “A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time elements,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, 2004, pp. 2087–2104.
- [150] Olivier, M., Dumas, G., and Morissette, J., “A fluid-structure interaction solver for nano-air-vehicle flapping wings,” *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, San Antonio, Texas, June 2009, AIAA Paper 2009-3676.
- [151] Lian, Y. and Shyy, W., “Numerical simulations of membrane wing aerodynamics for micro air vehicle applications,” *Journal of Aircraft*, Vol. 42, No. 4, 2005, pp. 865 – 73.
- [152] Wood, C., Gil, A., Hassan, O., and Bonet, J., “A partitioned coupling approach for dynamic fluid-structure interaction with applications to biological membranes,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 57, No. 5, 2008, pp. 555 – 81.
- [153] Teixeira, P. and Awruch, A., “Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method,” *Computer and Fluids*, Vol. 35, 2005, pp. 249–273.
- [154] Lohner, R., Cebal, J., Yang, C., Baum, J., Mestreau, E., Charman, C., and Pelesone, D., “Large-scale fluid-structure interaction simulations,” *Computing in Science & Engineering*, Vol. 6, No. 3, 2004, pp. 27 – 37.
- [155] Ghattas, O. and Li, X., “A variational finite element method for stationary nonlinear fluid-solid interaction,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 121, 1995, pp. 347–356.
- [156] Curtiss, C. and Hirschfelder, J., “Integration of stiff equations,” *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 38, 1952, pp. 235 – 243.

- [157] St-Amand, E., *Méthodes de Runge-Kutta implicites pour la résolution d'équations de convection-diffusion en régime instationnaire*, Master's thesis, École Polytechnique de Montréal, 2009.
- [158] Boscarino, S., "On an accurate third order implicit-explicit Runge-Kutta method for stiff problems," *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 59, No. 7, 2009, pp. 1515 – 28.
- [159] Aurby, A. and Chartier, P., "On improving the convergence of Radau IIA methods applied to index 2 DAEs," Tech. rep., INRIA - Programme 6, Rennes, France, 1995, Rapport de recherche - 2744.
- [160] Matthies, G. and Steindorf, J., "Partitioned strong coupling algorithms for Fluid-structure interaction," *Computers and Structures*, Vol. 81, 2003, pp. 805–812.
- [161] Jan, Y. and Sheu, T.-H., "Finite element analysis of vortex shedding oscillations from cylinders in the straight channel," *Computational Mechanics*, Vol. 33, 2004, pp. 81–94.
- [162] Wall, W. A., *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*, Ph.D. thesis, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1999.
- [163] Dettmer, W. and Peric, D., "A computational framework for fluid-structure interaction : Finite element formulation and applications," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 41-43, 2006, pp. 5754 – 5779.
- [164] van Zuijlen, A. H. and Bijl, H., "Implicit and explicit higher order time integration schemes for structural dynamics and fluid-structure interaction computations," *Computers and Structures*, Vol. 83, 2005, pp. 93 – 105.
- [165] Yang, Z. and Mavriplis, D., "Higher-order time-integration schemes for aeroelastic applications on unstructured meshes," *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 1, 2007/01/, pp. 138 – 50.
- [166] Martin-Vaquero, J., "A 17th-order Radau IIA method for package RADAU. Applications in mechanical systems," *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 59, No. 8, 2010, pp. 2464 – 2472.
- [167] De Bortoli, A., "Aeroelastic analysis of panels in compressible flows," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 20, No. 2, 2005, pp. 189 – 195.
- [168] Vázquez, J. G. V., *Nonlinear analysis of orthotropic membrane and shell structures including fluid-structure interaction*, Ph.D. thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports, 2007.
- [169] van Zuijlen, A., Bosscher, S., and Bijl, H., "Two level algorithms for partitioned fluid-structure interaction computations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 8, 2007, pp. 1458 – 1470.

- [170] BRÜLS, O., *Integrated simulation and reduced-order modeling of controlled flexible multibody systems*, Ph.D. thesis, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, Liège, Belgique, 2005.
- [171] de Langre, E., *Fluides et solides*, Éditions de l'École polytechnique, 2002.
- [172] Heil, M., Hazel, A. L., and Boyle, J., "Solvers for large-displacement fluid-structure interaction problems : Segregated versus monolithic approaches," *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 1, 2008, pp. 91 – 101.
- [173] Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, 7th ed., 1979.
- [174] Etienne, S. and Pelletier, D., "Geometric Conservation Law and Finite Element Methods for ALE Simulations of Incompressible Flow of fluid-structure interactions," *46th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Reno, NV, January 2008.
- [175] Duval, B. and Guillard, H., "Gestion de maillages triangulaires déformables," Tech. rep., SINUS - INRIA Sophia Antipolis - INRIA, 1994.
- [176] Etienne, S., Hay, A., Garon, A., and Pelletier, D., "Sensitivity Analysis of Unsteady Fluid-Structure Interaction Problems," *45th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Reno, NV, 2007.
- [177] Dhatt, G. and G.Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Les Presses de l'Université Laval, Québec, Canada, 1981.
- [178] Schenk, O. and Gärtner, K., "Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO," *Journal of Future Generation Computer Systems*, Vol. 20(3), 2004, pp. 475–487.
- [179] Schenk, O. and Gärtner, K., "On fast factorization pivoting methods for symmetric indefinite systems," *Elec. Trans. Numer. Anal.*, Vol. 23, 2006, pp. 158.
- [180] Roache, P. J., *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, Hermosa publishers, Albuquerque, New Mexico, 1998.

ANNEXE A

Fonction lissante du mouvement

Afin d'éviter les problèmes numériques, on a besoin d'un mouvement d'oscillation du profil régulier et très continue (i.e. C^2) afin de lisser les accélérations au départ. On construit par prolongement une fonction C^2 variant rapidement de 0 à 1 lorsque le temps varie de 0 à l'infini et ayant des dérivées première et seconde nulles au départ du mouvement et tendant rapidement vers 0. Pour une fréquence d'oscillation f_0 et un temps adimensionnel $\tilde{t}^* = f_0 t$, on définit cette fonction g par morceaux (voir figure A.1) :

$$g(t) = \begin{cases} g_1 &= a(\tilde{t}^*)^3 & \text{si } \tilde{t}^* < t_0^* \\ g_2 &= b \tanh(e\tilde{t}^* + c) + (1 - b) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \operatorname{atanh}\left(-\frac{1}{et_0}\right) - et_0 \\ \alpha = \tanh(et + c) \\ b = \frac{3}{et_0(1 - \alpha^2) - 3(\alpha - 1)} \\ a = \frac{b(\alpha - 1) + 1}{t_0^3} \end{array} \right.$$

On a en outre les dérivées par rapport au temps dimensionnel t s'exprimant :

$$g'(t) = \begin{cases} g'_1 &= 3af_0(\tilde{t}^*)^2 & \text{si } \tilde{t}^* < t_0^* \\ g'_2 &= bef_0(1 - \tanh(e\tilde{t}^* + c)^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g''(t) = \begin{cases} g''_1 &= 6af_0^2(\tilde{t}^*) & \text{si } \tilde{t}^* < t_0^* \\ g''_2 &= -2b(e f_0)^2 \tanh(e\tilde{t}^* + c)(1 - \tanh(e\tilde{t}^* + c)^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Le mouvement du foil ainsi imposé, se décompose en une translation vertical (*heaving*)

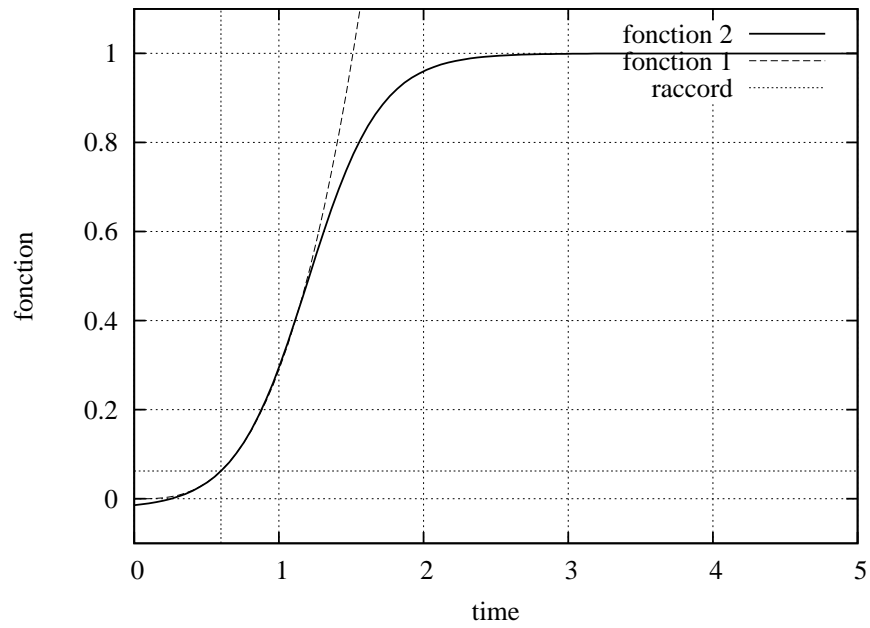


Figure A.1 Fonction de raccord C^2 .

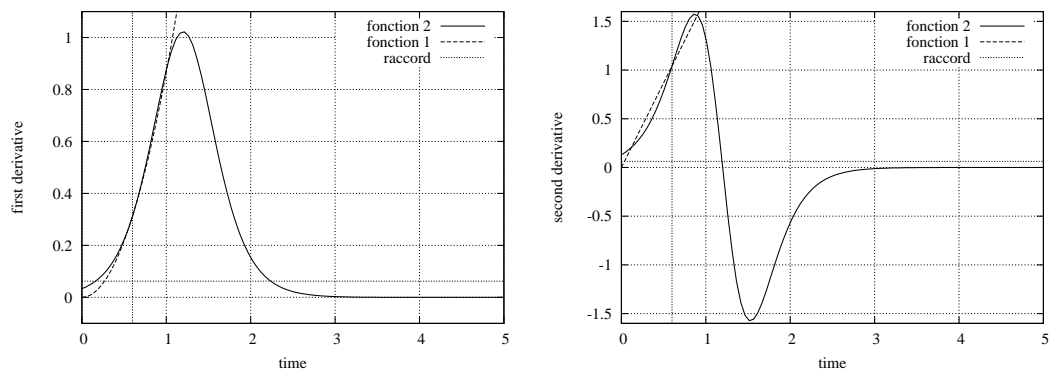


Figure A.2 Dérivées première et seconde de la fonction g de raccord C^2 .

et une rotation (*pitching*) lissées au départ grâce à la fonction g :

$$\begin{cases} h(t) = h_0 \sin(\omega t)g(t) & \text{translation verticale} \\ \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)g(t) & \text{rotation} \end{cases}$$

La figure A.3 présente l'évolution du battement $h(t)$ et de l'angle de rotation $\theta(t)$ ainsi que de leurs dérivées pour $h_0 = 1.0$, $\theta_0 = \pi/3$, $f = 0.18$, $e = 2.0$ et $t_0^* = 0.108$. Le lissage du mouvement au départ, donne un déplacement plus lent et progressif du profil comme représenté sur la figure A.4.

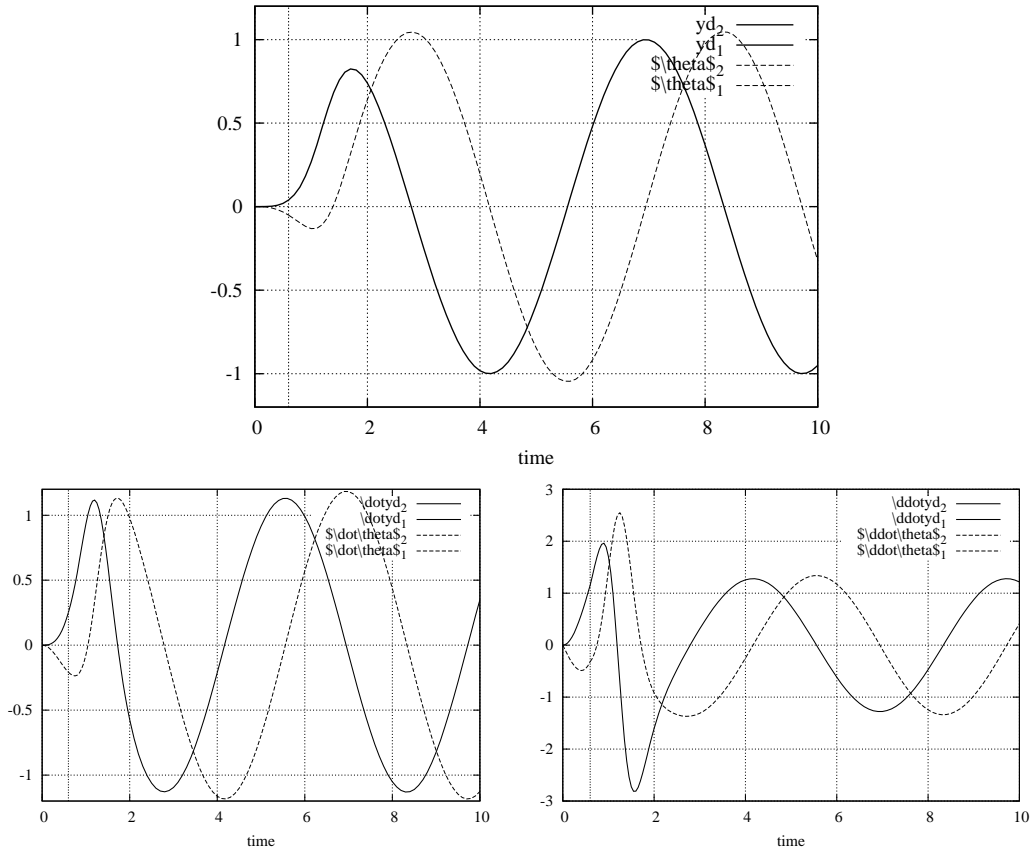


Figure A.3 Évolution de l'amplitude de translation et de l'angle de rotation.

La figure A.3 montre l'impact de la fonction de raccord sur les accélérations du profil au départ. Même si elles sont continues et nulles au départ, les dérivées secondes de l'amplitude de battement changent brutalement de signe peu après $t = 0$ ce qui pourrait rendre le problème plus raide (simulation numérique plus complexe) et entraîner un régime transitoire important.

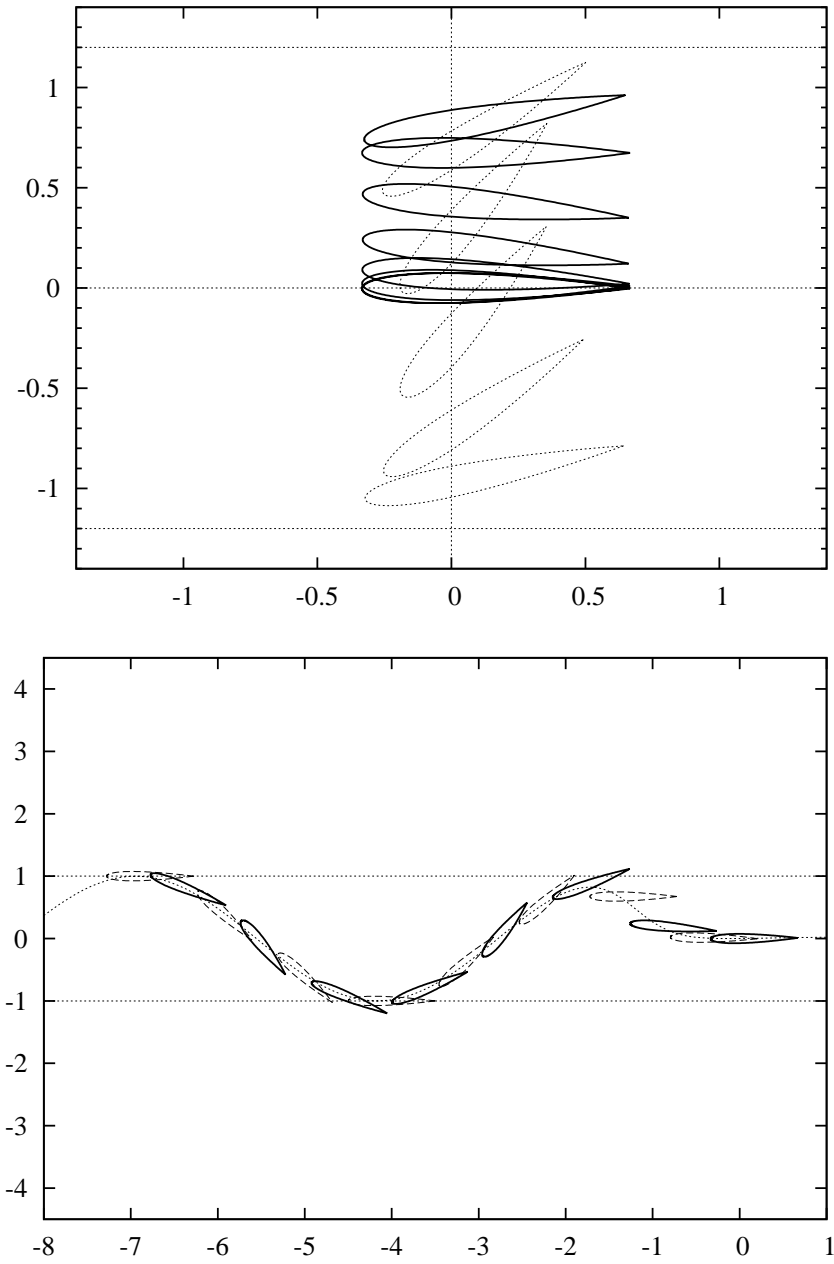


Figure A.4 Mouvement du profil NACA0015 au départ.

ANNEXE B

Liste des publications reliées à la thèse

J.-F. Cori, S. Etienne, A. Garon, D. Pelletier (soumis). “High-order implicit Runge-Kutta time integrators for Fluid-Structure Interactions”. *Journal of Computational Physics*, soumis le 19 novembre 2010.

J.-F. Cori, S. Etienne, D. Pelletier (2011). “On the determination of propulsive characteristics of a flapping airfoil with advanced ALE method”. *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Orlando, Florida, 4-7 janvier , 2011.

J.-F. Cori, S. Etienne, D. Pelletier (2010). “Numerical analysis of a flexible flapping airfoil with large displacements”. *18th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, London, Ontario, 17-19 Mai, 2010.

J.-F. Cori, S. Etienne, D. Pelletier, A. Garon (2010). “Implicit Runge-Kutta time integrators for Fluid-Structure Interactions”. *AIAA-2010-1445, 48th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Orlando, Florida, Janvier, 2010.